Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2009–12–21 kl 14.00–18.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Lös ekvationen $8^x + 2^{2x} = 2^{x+1}$. (2p)

   (b) För vilket reellt tal x antar funktionen $e^{2x} - e^x$ sitt minsta värde? (1p)

2. (a) Lös ekvationen $\ln(2x-6) + \ln \frac{1}{x} = \ln(7-x)$. (2p)

   (b) För vilka reella x är uttrycket $\sqrt{1 - \ln(x-1)}$ definierat? (1p)

3. (a) Skriv $\cos^3 2x$ som en summa av cosinus- och/eller sinustermer. (2p)

   (b) Skriv $\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ på polär form. (1p)

4. (a) Lös ekvationen $\sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{7})$. (1p)

   (b) Förenkla $\cos(\arcsin \frac{1}{3})$. (1p)

   (c) Förenkla $\arcsin(\sin \frac{6\pi}{7})$. (1p)

5. (a) Beräkna summan $\sum_{k=2}^{14} (-1)^k 2^k$. (1p)

   (b) I en aritmetisk summa med 15 termer är den första termen 1 och den tredje termen 7. Beräkna summan. (2p)

6. Lös ekvationen $\arctan 2x + \arctan 3x = -\frac{\pi}{4}$.

7. Bestäm alla komplexa talpar (a, b) sådana att $|z| = 2 \Rightarrow |\omega - 3| = 1$ där $\omega = \frac{az+b}{z}$.

Dugga 2 i TTIT02, 2009-12-21, lösningsförslag

1. (a) $8^x + 2^{2x} = 2^{x+1} \Leftrightarrow 8^x + 2^{2x} - 2^{x+1} = (2^x)^3 + (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x = /\ t = 2^x /\ = t^3 + t^2 - 2 \cdot t = t(t^2 + t - 2) = t(t+2)(t-1) = /\ t = 2^x / = 2^x(2^x + 2)(2^x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 = 2^0 \Leftrightarrow /2^x$ är strängt växande $/ \Leftrightarrow x = 0$. Svar: $x = 0$.

   (b) $e^{2x} - e^x = (e^x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ antar sitt minsta värde $-\frac{1}{4}$ då $e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. Svar: $x = -\ln 2$.

2. (a) Uttrycken är definierade då $2x - 6 > 0,\ x > 0$ och $7 - x > 0$ dvs då $3 < x < 7$.

   För $3 < x < 7$ gäller att $\ln(2x-6) + \ln \frac{1}{x} = \ln(7-x) \Leftrightarrow \ln(2x-6) - \ln x = \ln(8-x) \Leftrightarrow \ln(2x-6) = \ln x(7-x) \Leftrightarrow /\ln$ strängt växande $/ \Leftrightarrow 2x - 6 = x(7-x) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6) = 0$ som endast har lösningen $x = 6$ i intervallet. Svar: $x = 6$.

   (b) $\sqrt{1 - \ln(x-1)}$ är definierat då $\ln(x-1) \le 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ och $x - 1 \le e \Leftrightarrow 1 < x \le e + 1$. Svar: $1 < x \le e + 1$.

3. (a) $\cos^3 2x = /\text{Euler}/ = (\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2})^3 = /\text{Pascals triangel}/ = \frac{1}{8}((e^{i2x})^3 + 3(e^{i2x})^2 e^{-i2x} + 3e^{i2x}(e^{-i2x})^2 + (e^{-i2x})^3) = \frac{1}{8}(e^{i6x} + e^{-i6x} + 3(e^{i2x} - e^{-i2x})) = \frac{1}{4}(\cos 6x + 3\cos 2x)$. Svar: $\frac{1}{4}(\cos 6x + 3\cos 2x)$.

   (b) $\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})}{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{12}}$.
   Svar: $\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{12}}$.

4. (a) $\sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{7}) \Leftrightarrow 3x = 2x + \frac{\pi}{7} + n2\pi$ eller $3x = \pi - (2x + \frac{\pi}{7}) + n2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + n2\pi$ eller $x = \frac{6\pi}{35} + n\frac{2\pi}{5}$. Svar: $x = \frac{\pi}{7} + n2\pi$ eller $x = \frac{6\pi}{35} + n\frac{2\pi}{5}$ där n är ett godtyckligt heltal.

   (b) En rätvinklig triangel med hypotenusan 3 och kateterna 1 och $\sqrt{8}$ visar att $\cos(\arcsin \frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{8}}{3}$. Svar: $\frac{\sqrt{8}}{3}$.

   (c) Enhetscirkeln avslöjar att $\arcsin(\sin \frac{6\pi}{7}) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{7}) = \frac{\pi}{7}$.
   Svar: $\frac{\pi}{7}$.

5. (a) $\sum_{k=2}^{14} (-1)^k 2^k = \sum_{k=2}^{14} (-2)^k = /$ geometrisk summa med 13 termer, första term 4 och kvot $-2/ = 4\frac{(-2)^{13} - 1}{-2 - 1} = \frac{4(2^{13} + 1)}{3}$.
   Svar: $\frac{4(2^{13} + 1)}{3}$.

   (b) Låt $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + 14d) = \sum_{k=0}^{14} (a + kd) = 15\frac{a + (a + 14d)}{2}$ vara summan. Då gäller att $a + 2d - a = 2d = 6 \Leftrightarrow d = 3$ och att sista termen är $a + 14d = 1 + 14 \cdot 3 = 43$. Således är summan $15\frac{1 + 43}{2} = 330$. Svar: 330.

6. $\arctan 2x + \arctan 3x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\arctan 2x + \arctan 3x) = \frac{2x+3x}{1-6x^2} = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow 5x = 6x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} = (x-1)(x+\frac{1}{6}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$ eller $x = 1$.

Eftersom $\arctan x > 0$ då $x > 0$ är $x = 1$ ej någon lösning.

Eftersom $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < 0$ då $x < 0$ följer att $\arctan(-\frac{2}{6}) + \arctan(-\frac{3}{6}) \in]-\pi, 0[$. Då dessutom $\tan(\arctan(-\frac{2}{6}) + \arctan(-\frac{3}{6})) = -1 \Rightarrow \arctan(-\frac{2}{6}) + \arctan(-\frac{3}{6}) = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ för något heltal n följer att $n = 0$ och att $x = -\frac{1}{6}$ således är en lösning. Svar: $x = -\frac{1}{6}$.

7. $|\omega - 3| = |a - 3 + \frac{b}{z}| = /z = 2e^{i\phi}/ = ||a-3|e^{i\arg(a-3)} + \frac{b}{2}e^{-i\phi}|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a-3| + \frac{|b|}{2} \text{ om } \arg be^{-i\phi} = \arg(a-3) \\ ||a-3| - \frac{|b|}{2}| \text{ om } \arg be^{-i\phi} = -\arg(a-3) \end{cases}.$$

Båda uttrycken är lika med 1 endast om $a = 3$ och $|b| = 2$ eller om $b = 0$ och $|a - 3| = 1$.

Omvänt följer att $|z| = 2 \Rightarrow |a - 3 + \frac{b}{z}| = \begin{cases} \frac{|b|}{2} = 1 \text{ om } a = 3 \text{ och } |b| = 2 \\ |a-3| = 1 \text{ om } b = 0 \text{ och } |a-3| = 1 \end{cases}.$

Svar: $(a, b) = (3, e^{i\phi})$ eller $(a, b) = (3 + e^{i\phi}, 0)$ där $\phi \in [0, 2\pi]$.