Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2010–12–11 kl 14.00–18.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Lös ekvationen $4^x = 2^{x+1} + 2^3$. (1p)

   (b) Lös ekvationen $\ln(x+1) + \ln(x-1) - \ln(7-2x) = 0$. (2p)

2. Skriv $\cos 5x \sin 3x$ som en summa av cosinus- och/eller sinustermer.

   Lös även ekvationen $2\cos 5x \sin 3x + \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. (a) Beräkna summan $\sum_{k=3}^{41}(3k+1)$. (1p)

   (b) I en geometrisk summa med 5 termer är den första termen 16 och den fjärde termen 2. Beräkna summan. (1p)

   (c) Beräkna summan $\sum_{k=0}^{47}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3})$. (1p)

4. (a) Lös ekvationen $\cos 4x = \sin(x + \frac{\pi}{8})$. (1p)

   (b) Förenkla $\cos(\arcsin \frac{2}{3})$. (1p)

   (c) $\sin v = \frac{1}{3}$ och $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$. Bestäm $\cos v$. (1p)

5. (a) Skriv $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ på polär form. (1p)

   (b) Lös ekvationen $z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 4z - 8 = 0$. **Ledning:** $1 + i\sqrt{3}$ är en lösning. (2p)

6. Lös ekvationen $2\arctan x + \arctan \frac{4}{3} = 0$.

7. Visa att $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sin kx = \frac{(1+\cos x)\sin(2n+1)x-(1+\cos(2n+1)x)\sin x}{2+2\cos x}$.

Dugga 2 i TTIT02, 2010-12-11, lösningsförslag

1. (a) $4^x = 2^{x+1} + 2^3 \Leftrightarrow /4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2/ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow /t = 2^x/ \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2) = 0 \Leftrightarrow /t = 2^x/ \Leftrightarrow 2^x = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x = 2.$ Svar: $x = 2$.

   (b) Uttrycket är definierade då $x + 1 > 0,\ x - 1 > 0$ och $7 - 2x > 0$ dvs då $1 < x < \frac{7}{2}$.
   För dessa x gäller att $\ln(x+1) + \ln(x-1) - \ln(7-2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2-1) = \ln(7-2x) \Leftrightarrow$ $/\ln$ är strängt växande$/$ $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 7 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2) = 0$ som endast har lösningen $x = 2$ i intervallet. Svar: $x = 2$.

2. $\cos 5x \sin 3x = /\text{Euler}/ = \dfrac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} \cdot \dfrac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} = \dfrac{1}{4i}(e^{i8x} - e^{-i8x} - (e^{i2x} - e^{-i2x})) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{i8x} - e^{-i8x} - (e^{i2x} - e^{-i2x})}{2i} = \dfrac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x).$

   $2\cos 5x \sin 3x + \sin 2x = \sin 8x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 8x = \dfrac{\pi}{4} + n2\pi$ eller $8x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + n2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{32} + \dfrac{n\pi}{4}$ eller $x = \dfrac{3\pi}{32} + \dfrac{n\pi}{4}$ där n är ett godtyckligt heltal.
   Svar: $\dfrac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$ och lösningarna är $x = \dfrac{\pi}{32} + \dfrac{n\pi}{4}$ eller $x = \dfrac{3\pi}{32} + \dfrac{n\pi}{4}$ där n är ett godtyckligt heltal..

3. (a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{41}(3k+1) =$ /aritmetisk summa med 39 termer, första term 10 och sista 124/ $= \dfrac{39(10+124)}{2} = 39 \cdot 67 = 2613.$ Svar: 2613.

   (b) Låt $a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 = a\dfrac{1-q^5}{1-q}$ vara summan (om $q \neq 1$).
   Då gäller att $\begin{cases} a = 16 \\ aq^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16 \\ q^3 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$
   Summan blir därför $16\dfrac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}} = 2^5 - 1 = 31.$ Svar: 31.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{47}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right) = (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{47} - \frac{1}{49}) + (\frac{1}{48} - \frac{1}{50}) = /\text{teleskopsumma}/ = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = \frac{3}{2} - \frac{99}{2450}.$
   Svar: $\dfrac{3}{2} - \dfrac{99}{2450}$.

4. (a) $\cos 4x = \sin(x + \frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{8})) = \cos(\frac{3\pi}{8} - x) \Leftrightarrow 4x = \frac{3\pi}{8} - x + n2\pi$ eller $4x = -(\frac{3\pi}{8} - x) + n2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{40} + n\frac{2\pi}{5}$ eller $x = -\frac{\pi}{8} + n\frac{2\pi}{3}$.
   Svar: $x = \dfrac{3\pi}{40} + n\dfrac{2\pi}{5}$ eller $x = -\dfrac{\pi}{8} + n\dfrac{2\pi}{3}$ där n är ett godtyckligt heltal.

   (b) En rätvinklig triangel med hypotenusan 3 och kateterna 2 respektive $\sqrt{5}$ visar att $\cos(\arcsin\frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Svar: $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(c) Trigettan ger att $\cos^2 v = 1 - \sin^2 v = \dfrac{8}{9}$. Eftersom $\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos v < 0$ följer att $\cos v = -\sqrt{\dfrac{8}{9}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Svar: $\cos v = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

5. (a) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}} = /\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ och $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}/ = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$. Svar: $e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(b) Eftersom koefficienterna i polynomet är reella är även $1-i\sqrt{3}$ en lösning och $(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3}) = (z-1)^2+3 = z^2-2z+4$ kan brytas ut. Exempelvis liggande stolen ger att $z^4-2z^3+2z^2+4z-8 = (z^2-2z+4)(z^2-2) = (z^2-2z+4)(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm i\sqrt{3}$ eller $z = \pm\sqrt{2}$.
Svar: $z = 1 \pm i\sqrt{3}$ och $z = \pm\sqrt{2}$.

6. $2\arctan x + \arctan\dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow 2\arctan x = -\arctan\dfrac{4}{3} = \arctan(-\dfrac{4}{3})$.
Eftersom $V_{\arctan} =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ och arctan är strängt växande följer att exakt en lösning existerar.

$2\arctan x = \arctan(-\dfrac{4}{3}) \Rightarrow \tan(2\arctan x) = /\text{trigformel}/ = \dfrac{2\tan(\arctan x)}{1-\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{2x}{1-x^2} = \tan(\arctan(-\dfrac{4}{3})) = -\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 6x = 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{3x}{2} - 1 = (x+\dfrac{1}{2})(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ eller $x = 2$.

Eftersom $\arctan x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ är $x = -\dfrac{1}{2}$ enda möjliga lösningen och då en lösning existerar är $-\dfrac{1}{2}$ lösningen. Svar: $-1/2$.

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sin kx = /(e^{ix})^k = e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx/ = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \mathrm{Im}(e^{ix})^k = \mathrm{Im}\sum_{k=0}^{2n}(-e^{ix})^k$ = /geometrisk summa med $2n+1$ termer, första term 1 och kvot $-e^{ix}$/ $= \mathrm{Im}\dfrac{1-(-e^{ix})^{2n+1}}{1+e^{ix}} = \mathrm{Im}\dfrac{1+e^{i(2n+1)x}}{1+e^{ix}} =$

$\mathrm{Im}\dfrac{1+\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x}{1+\cos x + i\sin x} =$

$\mathrm{Im}\dfrac{(1+\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x)(1+\cos x - i\sin x)}{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x} =$

$\dfrac{(1+\cos x)\sin(2n+1)x - (1+\cos(2n+1)x)\sin x}{2+2\cos x}$ vilket skulle visas.