Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2010–12–22 kl 14.00–18.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skriv $\sin 4x \cdot \cos^2 x$ som en summa av cosinus- och/eller sinustermer och lös ekvationen $4\sin 4x \cdot \cos^2 x - \sin 6x - \sin 2x = 1$.

2. (a) Lös ekvationen $\ln(4-x) = \ln \frac{1}{3-x} + \ln(x+5)$. (2p)

   (b) Bestäm det minsta värdet av funktionen $4^x - 2^{x+2} + 8$. (1p)

3. (a) Lös ekvationen $\tan 4v + 1 = 0$. (1p)

   (b) Förenkla $\arcsin(\cos(-\frac{\pi}{6}))$. (1p)

   (c) Skriv $\sin x + \cos x$ på formen $C\sin(x+\phi)$ där $C > 0$ och $\phi \in [0, 2\pi[$. (1p)

4. (a) Beräkna summan $\sum_{k=5}^{27} (-1)^k 3^k$. (1p)

   (b) I en aritmetisk summa med 35 termer är den första termen 2 och summan av den andra och den fjärde termen är 20. Beräkna summan. (2p)

5. Bestäm D_f samt, om möjligt, inversen f^{-1} och $D_{f^{-1}}$ till funktionen $f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln ex}$.

6. (a) Lös ekvationen $z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Lösningen skall ges på formen $a + ib$. (1p)

   (b) Ekvationen $z^3 + 2z^2 - 5z + 12 = 0$ har en lösning z med $\text{Re } z = 1$. Bestäm samtliga lösningar. (2p)

7. Visa att $e^x - 1 \le xe^x \le e^{2x} - e^x$ med hjälp av olikheten $\ln x \le x - 1$, $x > 0$.

Dugga 2 i TTIT02, 2010-12-22, lösningsförslag

1. $\sin 4x \cos^2 x = /\text{Euler}/ = \dfrac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i} \cdot (\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^2 = \dfrac{1}{8i}(e^{i4x} - e^{-i4x})(e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}) = \dfrac{1}{8i}(e^{i6x} + 2e^{i4x} + e^{i2x} - e^{-i2x} - 2e^{-i4x} - e^{-i6x}) = \dfrac{1}{4}(\sin 6x + 2\sin 4x + \sin 2x)$.

   $4\sin 4x \cos^2 x - \sin 6x - \sin 2x = 2\sin 4x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow 4x = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $4x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + n2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{n\pi}{2}$ eller $x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{n\pi}{2}$ där n är ett godtyckligt heltal.
   Svar: $\dfrac{1}{4}(\sin 6x + 2\sin 4x + \sin 2x)$ och lösningarna är $x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{n\pi}{2}$ eller $x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{n\pi}{2}$ där n är ett godtyckligt heltal..

2. (a) Uttrycket är definierade då $4 - x > 0,\ 3 - x > 0$ och $x + 5 > 0$ dvs då $-5 < x < 3$.
   För dessa x gäller att $\ln(4 - x) = \ln\dfrac{1}{3 - x} + \ln(x + 5) \Leftrightarrow \ln(4 - x) + \ln(3 - x) = \ln(x + 5) \Leftrightarrow \ln(4 - x)(3 - x) = \ln(x + 5) \Leftrightarrow$ $/\ln$ är strängt växande$/ \Leftrightarrow (4 - x)(3 - x) = x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7) = 0$ som endast har lösningen $x = 1$ i intervallet.
   Svar: $x = 1$.

   (b) $4^x - 2^{x+2} + 8 = /4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2/ = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 8 = /t = 2^x/ = t^2 - 4t + 8 = (t - 2)^2 + 4 = /t = 2^x/ = (2^x - 2)^2 + 4$ som antar minsta värdet 4 för $x = 1$. Svar: 4.

3. (a) $1 + \tan 4v = 0 \Leftrightarrow \tan 4v = -1 = -\tan\dfrac{\pi}{4} = \tan(-\dfrac{\pi}{4}) \Leftrightarrow 4v = -\dfrac{\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow v = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{n\pi}{4}$.
   Svar: $v = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{n\pi}{4}$ där n är ett godtyckligt heltal.

   (b) $\arcsin(\cos(-\dfrac{\pi}{6})) = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. Svar: $\dfrac{\pi}{3}$.

   (c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x) = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos x) = /\text{trigformel}/ = \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$. Svar: $\sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$.

4. (a) $\displaystyle\sum_{k=5}^{27}(-1)^k 3^k = \sum_{k=5}^{27}(-3)^k =$ /geometrisk summa med 23 termer, första term -3^5 och kvot -3/
   $= (-3^5)\dfrac{(-3)^{23} - 1}{-3 - 1} = -3^5 \cdot \dfrac{3^{23} + 1}{4} = -\dfrac{3^{28} + 3^5}{4}$.
   Svar: $-\dfrac{3^{28} + 3^5}{4}$.

   (b) Låt $\displaystyle\sum_{k=0}^{34}(a + kd) = 35 \cdot \frac{a + (a + 34d)}{2}$ vara den aritmetiska summan.
   Då gäller att $a = 2$ och att $a + d + (a + 3d) = 2a + 4d = 4 + 4d = 20 \Leftrightarrow d = 4$. Således är summan $35 \cdot \dfrac{2 + (2 + 34 \cdot 4)}{2} = 35 \cdot 70 = 2450$.
   Svar: 2450.

5. Funktionen är definierad då $x > 0$ och $ex \neq 1$, dvs då $x > 0$ och $x \neq \frac{1}{e} = e^{-1}$.

$y = \frac{\ln\sqrt{x}}{\ln(ex)} = \frac{\frac{1}{2}\ln x}{\ln x + \ln e} = \frac{\ln x}{2(\ln x + 1)} \Leftrightarrow 2y(\ln x + 1) = \ln x \Leftrightarrow 2y = \ln x(1 - 2y) \Leftrightarrow \ln x = \frac{2y}{1 - 2y} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2y}{1-2y}}$.

Således är $f^{-1}(y) = e^{\frac{2y}{1-2y}}$ som är definierad då $y \neq \frac{1}{2}$.

Svar: $D_f =]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, \infty[$, $f^{-1}(x) = e^{\frac{2x}{1-2x}}$ och $D_{f^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

6. (a) $z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Sätt $z = re^{i\phi}$ så fås att $r^2 e^{i2\phi} = e^{i(\frac{\pi}{3} + n2\pi)} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \phi = \frac{\pi}{6} + n\pi, \ \ n = 0, 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ eller $z = e^{i(\frac{\pi}{6} + \pi)} = -(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$.

Svar: $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$.

(b) $z = 1 + iy$ insatt i ekvationen ger $(1 + iy)^3 + 2(1 + iy)^2 - 5(1 + iy) + 12 = 1 + i3y - 3y^2 - iy^3 + 2 + i4y - 2y^2 - 5 - i5y + 12 = 10 - 5y^2 + i(2y - y^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 10 = 5(y^2 - 2) = 0 \\ y^3 - 2y = y(y^2 - 2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$.

Således är $1 \pm i\sqrt{2}$ rötter och $(z - 1 + i\sqrt{2})(z - 1 - i\sqrt{2}) = (z - 1)^2 + 2 = z^2 - 2z + 3$ kan brytas ut. $z^3 + 2z^2 - 5z + 12 = (z^2 - 2z + 3)(z + 4) = 0 \Leftrightarrow z = 1 + \pm\sqrt{2}$ eller $z = -4$.

Svar: $z = 1 \pm i\sqrt{2}$ eller $z = -4$.

7. Insätts $x = \frac{1}{t}$ i olikheten $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$ fås $\ln\frac{1}{t} = -\ln t \leq \frac{1}{t} - 1$, $t > 0$. Således gäller dubbelolikheten $1 - \frac{1}{t} \leq \ln t \leq t - 1$ för $t > 0$. Med $t = e^x$ får vi $1 - \frac{1}{e^x} \leq \ln e^x = x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow \ /e^x > 0/ \ \Leftrightarrow e^x - 1 \leq xe^x \leq e^x(e^x - 1) = e^{2x} - e^x$ vilket skulle visas.