Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2011–12–19 kl 14.00–18.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Lös ekvationen $\ln(x+2) + \ln x = \ln(5-2x)$. (2p)

   (b) Lös ekvationen $9^x + 3^{x+1} = 4$. (1p)

2. (a) Skriv $\cos 3x \sin^2 x$ som en summa av cosinus- och/eller sinustermer. (2p)

   (b) Bestäm imaginärdelen av $\frac{(e^{ix})^3 + e^{i2x}}{e^{ix}}$. (1p)

3. (a) Beräkna $\cos(\arcsin \frac{5}{6})$. (1p)

   (b) Lös ekvationen $\cos 5x = \cos 3x$. (1p)

   (c) Skriv $5 \sin x + 5 \cos x$ på formen $C \sin(x + \phi)$. (1p)

4. (a) Beräkna summan $92 + 96 + 100 + \cdots + 200$. (1p)

   (b) Beräkna summan $\sum_{k=2}^{8} 3 \cdot 2^{-k}$. (1p)

   (c) Utveckla $(3-x)^4$. (1p)

5. Bestäm D_f, inversen f^{-1} samt $D_{f^{-1}}$ för funktionen $f(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 = 0$ har en rot med argumentet $\frac{\pi}{2}$. Bestäm samtliga rötter.

7. Visa att $n < \ln n! + \sum_{k=1}^{n} \tan \frac{1}{k}$.

Dugga 2 i TTIT02, 2011-12-19, lösningsförslag

1. (a) Uttrycken är definierade då $x+2>0$, $x>0$ och $5-2x>0$, dvs då $0<x<\frac{5}{2}$.
För $0<x<\frac{5}{2}$ gäller att $\ln(x+2)+\ln x=\ln(5-2x)\Leftrightarrow$ $\ln x(x+2)=\ln(5-2x)\Leftrightarrow$ / ln är strängt växande/ $\Leftrightarrow x^2+2x=5-2x\Leftrightarrow x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0\Leftrightarrow x=1$ ty $0<x<\frac{5}{2}$.
Svar: $x=1$.
(b) $9^x+3^{x+1}=4\Leftrightarrow$ $/9^x=3^{2x}=(3^x)^2,\ 3^{x+1}=3\cdot 3^x,\ t=3^x/\Leftrightarrow$ $t^2+3t-4=(t+4)(t-1)=/t=3^x/=(3^x+4)(3^x-1)=0\Leftrightarrow$ $3^x=1=3^0\Leftrightarrow x=0$. Svar: $x=0$.

2. (a) $\cos 3x\sin^2 x=/\text{Euler}/=\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\cdot(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^2=$ $-\frac{1}{8}(e^{i3x}+e^{-i3x})(e^{i2x}-2+e^{-i2x})=-\frac{1}{8}(e^{i5x}+e^{-i5x}-2(e^{i3x}+e^{-i3x})+e^{ix}+e^{-ix})=/\text{Euler}/=-\frac{1}{4}(\cos 5x-2\cos 3x+\cos x)$.
Svar: $-\frac{1}{4}(\cos 5x-2\cos 3x+\cos x)$.
(b) $\frac{(e^{ix})^3+e^{i2x}}{e^{ix}}=\frac{e^{i3x}+e^{i2x}}{e^{ix}}=e^{i2x}+e^{ix}=\cos 2x+i\sin 2x+\cos x+i\sin x$. Således är imaginärdelen $\sin 2x+\sin x$.
Svar: $\sin 2x+\sin x$.

3. (a) En rätvinklig triangel med hypotenusan 6 och kateterna 5 respektive $\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$ visar att $\cos(\arcsin\frac{5}{6})=\frac{\sqrt{11}}{6}$.
Svar: $\frac{\sqrt{11}}{6}$.
(b) $\cos 5x=\cos 3x\Leftrightarrow 5x=3x+n2\pi$ eller $5x=-3x+n2\pi\Leftrightarrow x=n\pi$ eller $x=n\frac{\pi}{4}$ där n är ett godtyckligt heltal.
Svar: $x=n\pi$ eller $x=n\frac{\pi}{4}$ där n är ett godtyckligt heltal.
(c) $5\sin x+5\cos x=/\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}/=$ $5\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)=/\tan\phi=1$ och ϕ i första kvadranten $\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{4}/$ $=5\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x)=/\text{formel}/$ $=5\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$. Svar: $5\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

4. (a) $92+96+\cdots+200=\sum_{k=0}^{27}(92+k4)=$ /aritmetisk summa med 28 termer/ $=\frac{28(92+200)}{2}=4088$. Svar: 4088.

(b) $\sum_{k=2}^{8} 3 \cdot 2^{-k}$ =/geometrisk summa med 7 termer, första term $3 \cdot 2^{-2} = \dfrac{3}{4}$ och kvot $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$/ $= \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1-(1/2)^7}{1-1/2} = \dfrac{3(1-\frac{1}{128})}{2} = \dfrac{3 \cdot 127}{256} = \dfrac{381}{256}$. Svar: $\dfrac{381}{256}$.

(c) $(3-x)^4 =$ /Pascals triangel/ $= 3^4 + 4 \cdot 3^3(-x) + 6 \cdot 3^2(-x)^2 + 4 \cdot 3(-x)^3 + (-x)^4 = 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4$.
Svar: $81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4$.

5. f är definierad då $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

$y = -(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x})^{1/2} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ och $y \leq 0 \Leftrightarrow y^2\sqrt{x} = 1-x,\ y \leq 0 \Leftrightarrow$ $/t = \sqrt{x}/$ $\Leftrightarrow t^2 + ty^2 - 1 = (t + \dfrac{y^2}{2})^2 - \dfrac{y^4}{4} - 1 =$ $/t = \sqrt{x}/$ $= (\sqrt{x} + \dfrac{y^2}{2})^2 - \dfrac{y^4}{4} - 1 = 0,\ y \leq 0 \Leftrightarrow$ $/\sqrt{x} + \dfrac{y^2}{2} \geq 0,\ \dfrac{y^4}{4} + 1 > 0/$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x} + \dfrac{y^2}{2} = \sqrt{\dfrac{y^4}{4} + 1},\ y \leq 0 \Leftrightarrow x = (\sqrt{\dfrac{y^4}{4} + 1} - \dfrac{y^2}{2})^2,\ y \leq 0$.

Således är $f^{-1}(y) = (\sqrt{\dfrac{y^4}{4} + 1} - \dfrac{y^2}{2})^2$ och definitionsområdet för inversen är $y \leq 0$.

Svar: $D_f =]0,1],\ f^{-1}(x) = (\sqrt{\dfrac{x^4}{4} + 1} - \dfrac{x^2}{2})^2$ och $D_{f^{-1}} =]-\infty, 0]$.

6. Ekvationen har en rot $z = iy$. Insatt i ekvationen fås att $y^4 + 2iy^3 - 7y^2 - 4iy + 10 = y^4 - 7y^2 + 10 + i(2y^3 - 4y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 4y = 0 \\ y^4 - 7y^2 + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 2y(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2}) = 0 \\ (y^2-2)(y^2+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$. Således kan
$(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2}) = z^2 + 2$ brytas ut och vi får att
$z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 = (z^2+2)(z^2 - 2z + 5)$.

Eftersom $z^2 - 2z + 5 = (z-1)^2 - (2i)^2 = (z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)$ följer att rötterna är $z = \pm i\sqrt{2}$ och $z = 1 \pm 2i$.
Svar: $z = \pm i\sqrt{2}$ och $z = 1 \pm 2i$.

7. Olikheten $\ln x \leq x - 1$ ger att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - 1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - n <$ $/x < \tan x$ om $0 < x < \dfrac{\pi}{2}/ \;\; < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan \frac{1}{k} - n \Leftrightarrow \;\; /\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{k} = \ln \frac{1}{n!} =$ $-\ln n!/ \;\; \Leftrightarrow n < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan \frac{1}{k} + \ln n!$ vilket skulle visas.