

Dugga 2 i Matematisk Grundkurs

2013-12-16 kl. 8.00 - 12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng. För godkänt betyg räcker 9p. Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $9^x - 3^x = 2$. (1p)

(b) Beräkna och förenkla $\binom{36}{34}$ så långt som möjligt. (1p)

(c) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ som löser $\cos(2x) = \sin(x)$. (1p)

2. Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att $z^4 = -2(1 + i\sqrt{3})$. Lösningarna skall ges på formen $z = x + iy$.

3. Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\ln(x) + \ln(x^2 + 2x - 1) = \ln 2.$$

4. (a) Bestäm största möjliga definitions mängd till $f(x) = x^4 + \ln(x^2)$ och visa att $f(x)$ med denna definitions mängd inte är inverterbar. (1p)

(b) Visa att det finns en (icke-tom) mängd D_f sådan att $f(x)$, med definitions mängd D_f , är inverterbar. (2p)

5. Visa att $4\cos^3(x) - 12\cos^2(x) + 8\cos(x) = \cos(3x) - 6\cos(2x) + 11\cos(x) - 6$ och bestäm sedan alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $\cos(3x) - 6\cos(2x) + 11\cos(x) = 6$.

6. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt

$$v = 2 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} - \arctan(-8 + 3\sqrt{7}).$$

7. För den naturliga logaritmen så gäller det att $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ då x och y tillhör definitions-mängden $D_{\ln} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Vidare så gäller det även att $\ln x < x - 1$ för alla $x \in D_{\ln}$ sådana att $x \neq 1$. Visa utifrån detta att följande påståenden gäller:

(a) $\ln x < 0$ då $0 < x < 1$, (1p)

(b) $\ln$ är strängt växande. (2p)

Lösningsskisser för TTIT02 2013-12-16

1. (a) Vi sätter $t = 3^x$ och noterar att $9^x = 3^{2x} = (3^x)^2$ vilket ger

$$\begin{aligned} 9^x + 3^x = 2 &\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ t - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2} &\Leftrightarrow t = 2 \text{ eller } t = -1. \end{aligned}$$

Eftersom det inte finns några $x \in \mathbb{R}$ sådana att $3^x = -1$ så ger inte detta t någon lösning. Däremot kan vi finna x sådant att $3^x = 2$:

$$3^x = 2 \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln 2 \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

- (b) Från definitionen av binomialkoefficient får vi att

$$\binom{36}{34} = \frac{36!}{34!(36-34)!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34!}{34! 2!} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 630.$$

- (c) Eftersom $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ så får vi att

$$\begin{aligned} \cos 2x = \sin x &\Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\pi/2 - x) \Leftrightarrow 2x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n \Leftrightarrow \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n &\text{ eller } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} &\text{ eller } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{aligned}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

2. Låt oss börja med att skriva $-2(1 + i\sqrt{3})$ på polär form:

$$\begin{aligned} |-2(1 + i\sqrt{3})| &= \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4 \\ -2(1 + i\sqrt{3}) &= 4e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cos \theta = -2 \\ 4 \sin \theta = -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \theta &= -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Alltså kan vi skriva den ursprungliga binomiska ekvationen som

$$z^4 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Nu ansätter vi $z = |z|e^{i\varphi}$, vilket ger oss

$$\begin{aligned} z^4 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} &\Leftrightarrow |z|^4 e^{4i\varphi} = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} |z|^4 = 4 \\ 4\varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}. \end{aligned}$$

Alltså, alla lösningar till ekvationen ges av

$$z = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2})} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

vilket ger 4 olika komplexa tal för $n = 0, 1, 2, 3$. Låt oss nu skriva dessa lösningar på formen $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}e^{i(-\pi/6)} = \sqrt{2}(\cos(-\pi/6)) + i\sin(-\pi/6) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z_1 &= \sqrt{2}e^{i(-\pi/6 + \pi/2)} = \sqrt{2}(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}} \\ z_2 &= \sqrt{2}e^{i(-\pi/6 + \pi)} = \sqrt{2}(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z_3 &= \sqrt{2}e^{i(-\pi/6 + 3\pi/2)} = \sqrt{2}(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

3. För att ekvationen skall vara definierad måste det gälla att $x > 0$ och $x^2 + 2x - 1 > 0$. För att undersöka var detta gäller hittar vi rötterna till polynomet $x^2 + 2x - 1$:

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2},$$

vilket ger att $x^2 + 2x - 1 > 0$ då $x < -1 - \sqrt{2}$ eller $x > -1 + \sqrt{2}$. Tillsammans med kravet $x > 0$ ger detta att ekvationen är definierad för $x > -1 + \sqrt{2}$, och vi antar i det följande att detta gäller, vilket gör att vi kan använda logaritmlagarna:

$$\begin{aligned} \ln x + \ln(x^2 + 2x - 1) = \ln 2 &\Leftrightarrow \ln(x(x^2 + 2x - 1)) = \ln 2 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 1) = 2 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Vi noterar att $x = 1$ är en rot till polynomet ovan och med hjälp av polynomdivision fås att

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x^2 + 3x + 2).$$

Rötterna till polynomet $x^2 + 3x + 2$ ges (med hjälp av kvadratkomplettering) av $x = -2$ eller $x = -1$. Alltså har vi visat

$$\begin{cases} \ln x + \ln(x^2 + 2x - 1) \\ x > -1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(x+2) = 0 \\ x > -1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

eftersom $-1 + \sqrt{2} > 0$. Alltså är $x = 1$ den enda lösningen till ekvationen.

4. (a) $f(x)$ är definierad för alla $x \neq 0$, eftersom $x^2 > 0$ för alla sådana x . Alltså blir största möjliga definitionsmängd $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Funktionen med denna definitionsmängd är ej injektiv eftersom $f(1) = f(-1)$. Alltså är funktionen ej inverterbar.
- (b) Låt oss välja $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ och visa att $f(x)$ med denna definitionsmängd är strängt växande (vilket medför att funktionen är inverterbar). Vi antar därför att vi har $x_1, x_2 \in D_f$ sådana att $x_1 < x_2$. Från detta beräknar vi

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^4 - x_2^4 + \ln(x_1^2) - \ln(x_2^2) = x_1^4 - x_2^4 - \ln\left(\frac{x_1^2}{x_2^2}\right).$$

Då $0 < x_1 < x_2$ så gäller det att $x_1^4 - x_2^4 < 0$ och att $\frac{x_1}{x_2} < 1$, och den sista olikheten medför att $\ln \frac{x_1^2}{x_2^2} < 0$. Använder vi detta i uttrycket för $f(x_1) - f(x_2)$ ovan så får vi att

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

för $x_1, x_2 \in D_f$ sådana att $x_1 < x_2$, vilket (per definition) betyder att funktionen är strängt växande och således inverterbar.

5. Vi använder oss av Eulers formel för $\cos x$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

för att skriva om uttrycket $4 \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 8 \cos x$:

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 8 \cos x &= 4 \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right)^3 - 12 \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right)^2 + 8 \cdot \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{i3x} + e^{-i3x}) - 3(e^{i2x} + e^{-i2x}) + \frac{11}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) - 6 \\ &= \cos 3x - 6 \cos 2x + 11 \cos x - 6. \end{aligned}$$

Nu använder vi detta för att lösa ekvationen $\cos 3x - 6 \cos 2x + 11 \cos x = 6$:

$$\cos 3x - 6 \cos 2x + 11 \cos x - 6 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 8 \cos x = 0.$$

Vi sätter $t = \cos x$ och får ekvationen

$$\begin{aligned} 4t^3 - 12t^2 + 8t = 0 &\Leftrightarrow t(t^2 - 3t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ eller } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ t = 0 \text{ eller } t = 1 \text{ eller } t = 2. \end{aligned}$$

Vi söker sedan $x \in \mathbb{R}$ sådana att $\cos x = t$. Det finns inga $x \in \mathbb{R}$ sådana att $\cos x = 2$, vilket exkluderar lösningen $t = 2$. För $t = 0$ och $t = 1$ får vi

$$\begin{aligned}\cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \cos x = 1 &\Leftrightarrow x = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

vilket ger alla lösningar till den ursprungliga ekvationen.

6. Låt oss börja med att beräkna $\tan(v)$ för att sedan sluta oss till från detta vad v kan vara. För att förenkla notationen sätter vi

$$\begin{aligned}\alpha &= \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \beta &= \arctan(-8 + 3\sqrt{7}),\end{aligned}$$

vilket ger $v = 2\alpha - \beta$. Med hjälp av additionsformeln för tangens fås

$$\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan(2\alpha) \tan \beta},$$

vilket leder till att vi behöver beräkna $\tan 2\alpha$ och $\tan \beta$. Vi får direkt att

$$\tan \beta = \tan(\arctan(-8 + 3\sqrt{7})) = -8 + 3\sqrt{7}.$$

För att beräkna $\tan 2\alpha$ använder vi återigen additionsformeln (eller formeln för dubbla vinkeln) för tangens:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Eftersom $\tan(\arcsin x) = x/\sqrt{1-x^2}$ beräknar vi $\tan \alpha$ till

$$\tan \alpha = \tan\left(\arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{7}{8}}} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

vilket ger

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Med hjälp av detta kan vi nu beräkna $\tan v$:

$$\tan v = \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan(2\alpha) \tan \beta} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3} - (-8 + 3\sqrt{7})}{1 + \frac{\sqrt{7}}{3}(-8 + 3\sqrt{7})} = 1$$

Då $\tan(2\alpha + \beta) = 1$ så gäller det att

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

för något heltal n . Nu är det så att $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (eftersom $\frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$) vilket medför att $2\alpha \in [0, \pi]$. Vad vet vi om β ? Eftersom $7^2 < (3\sqrt{7})^2 < 8^2$ så gäller det att $7 < 3\sqrt{7} < 8$ vilket är ekvivalent med att

$$-1 < -8 + 3\sqrt{7} < 0$$

Eftersom $\arctan$ är en strängt växande funktion betyder detta att

$$\arctan(-1) < \arctan(-8 + 3\sqrt{7}) < \arctan(0) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \beta < 0$$

Detta medför att $0 < 2\alpha - \beta < \frac{5\pi}{4}$, vilket betyder att $2\alpha - \beta$ inte kan vara $5\pi/4$ (notera den strikta olikheten). Alltså måste $2\alpha - \beta = \pi/4$.

7. (a) Enligt uppgiften så gäller det att $\ln x < x - 1$ för alla $x > 0$ sådana att $x \neq 1$. Speciellt gäller det alltså att $\ln x < x - 1$ för alla $0 < x < 1$, vilket ger att

$$\ln x < x - 1 < 0 \quad \text{då } 0 < x < 1.$$

- (b) Tag $x_1, x_2 \in D_{\ln}$ sådana att $x_1 < x_2$. Vi får då

$$\ln x_1 - \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

eftersom $x_1, x_2 > 0$. Då $x_1, x_2 > 0$ följer det från $x_1 < x_2$ att $\frac{x_1}{x_2} < 1$, vilket medför att

$$\ln x_1 - \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2} < 0,$$

då vi i (a) har visat att $\ln x < 0$ då $0 < x < 1$. Vi har således visat att för alla $x_1, x_2 \in D_{\ln}$ sådana att $x_1 < x_2$ så gäller det att $\ln x_1 - \ln x_2 < 0$. Detta betyder (per definition) att funktionen $\ln$ är strängt växande.