Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Joakim Arnlind

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk Grundkurs

2014-01-07 kl. 8.00 - 12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng. För godkänt betyg räcker 9p. Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) Beräkna $\sin\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (1p)

   (b) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $\ln x = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x^2)}{\ln\left(\frac{e}{x}\right) + \ln(x^3) + \ln(ex) - \ln(x^2)}$. (1p)

   (c) Beräkna $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$ (1p)

2. Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $\sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 1$.

3. Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att $\left(z + \frac{1}{2}i\right)^3 = -3\sqrt{3}$. Lösningarna skall ges på formen $z = x + iy$.

4. Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $\arccos(x) = \arctan(2\sqrt{3}\,x)$.

5. Kontrollera att $z = i\sqrt{2}$ är en rot till polynomet $p(z) = z^5 + 2z^3 - 2z^2 - 4$, och bestäm sedan alla rötter till $p(z)$.

6. Bestäm största möjliga definitionsmängd till

$$f(x) = \arctan\sqrt{\ln\frac{2x-3}{x-4}}$$

   och bestäm sedan de $x \in \mathbb{R}$ sådana att $f(x) \geq \frac{\pi}{4}$.

7. För $x, y \in \mathbb{R}$ och $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieras

$$e^z = e^x e^{iy} \qquad \text{och} \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

   Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att $\sin z = 2$.

Lösningsskisser för TTIT02 2014-01-07

1. (a) Eftersom

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

för $x \in \mathbb{R}$ så fås

$$\sin\big(\arctan(1/\sqrt{3})\big) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2}.$$

(b) För att ekvationen skall vara definierad så måste åtminstone $x > 0$. Under detta antagande kan vi använda logaritmlagarna för att skriva om

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x^2)}{\ln\left(\frac{e}{x}\right) + \ln(x^3) + \ln(ex) - \ln(x^2)} = \frac{-\ln x - 2\ln x}{\ln e - \ln x + 3\ln x + \ln e + \ln x - 2\ln x} = \frac{-3\ln x}{2+\ln x}$$

vilket gör att ekvationen kan skrivas som

$$\ln x = \frac{-3\ln x}{2+\ln x}.$$

Då $\ln x \neq -2$ är detta ekvivalent med

$$(2+\ln x)\ln x = -3\ln x$$

och sätter vi $t = \ln x$ så fås andragradsekvationen

$$t^2 + 5t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(t+5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \text{ eller } t = -5$$

vilket ger att $x = 1$ eller $x = e^{-5}$. Dessa lösningar uppfyller kraven att $x > 0$ och $\ln x \neq -2$. Alltså är $x = 1$ och $x = e^{-5}$ alla lösningar till den ursprungliga ekvationen.

(c) Då $x \in [0, \pi]$ gäller det att $\arccos(\cos(x)) = x$. Eftersom $4\pi/3$ inte ligger i detta intervall använder vi att $\cos(4\pi/3) = \cos(-4\pi/3) = \cos(2\pi/3)$ och erhåller

$$\arccos\big(\cos(4\pi/3)\big) = \arccos\big(\cos(2\pi/3)\big) = \frac{2\pi}{3}$$

eftersom $2\pi/3 \in [0, \pi]$.

2. Vi börjar med att skriva om vänsterledet med hjälp av en hjälpvinkel; alltså, vi ska finna C, v (med $C > 0$) sådana att

$$C\sin(2x+v) = \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x).$$

Om vi använder additionsformeln för sinus i vänsterledet, så blir ovanstående ekvation

$$C\sin(2x)\cos(v) + C\cos(2x)\sin(v) = \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x),$$

vilket löses då

$$\begin{cases} C\cos(v) = 1 \\ C\sin(v) = \sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C^2\cos^2(v) = 1 \\ C^2\sin^2(v) = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C^2(\cos^2(v) + \sin^2(v)) = 1 + 3$$

vilket ger att $C = 2$. Insatt i ekvationsystemet ovan ger detta att

$$\begin{cases} \cos(v) = \frac{1}{2} \\ \sin(v) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Vi har således visat att

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x),$$

vilket ger att den ursprungliga ekvationen kan skrivas som

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad\Leftrightarrow\\
&2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi n \quad \text{eller} \quad 2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n \quad (n\in\mathbb{Z}) \quad\Leftrightarrow\\
&2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \quad \text{eller} \quad 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad (n\in\mathbb{Z}) \quad\Leftrightarrow\\
&x=-\frac{\pi}{12}+\pi n \quad \text{eller} \quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n \quad (n\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

3. Vi sätter $w=z+i/2$ och får en binomisk ekvation för w:

$$w^3=-3\sqrt{3},$$

och vi noterar att högerledet kan skrivas på polär form som $3\sqrt{3}e^{i\pi}$, vilket ger ekvationen

$$w^3=3\sqrt{3}e^{i\pi}.$$

Vi ansätter $w=|w|e^{i\varphi}$ och får att

$$|w|^3e^{3i\varphi}=3\sqrt{3}e^{i\pi} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}|w|^3=3\sqrt{3}\\ 3\varphi=\pi+2\pi n\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}|w|=\sqrt{3}\\ \varphi=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\end{cases},$$

vilket, för $n=0,1,2$, ger oss 3 lösningar för w:

$$\begin{aligned}
w_0&=\sqrt{3}e^{i\pi/3}=\sqrt{3}\,(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}\\
w_1&=\sqrt{3}e^{i\pi}=-\sqrt{3}\\
w_2&=\sqrt{3}e^{i5\pi/3}=\sqrt{3}\,(\cos(5\pi/3)+i\sin(5\pi/3))=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Slutligen beräknar vi z från $w=z+i/2$:

$$\begin{aligned}
z_0&=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}-\frac{i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\\
z_1&=-\sqrt{3}-\frac{i}{2}\\
z_2&=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}-\frac{i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-2i.
\end{aligned}$$

4. Låt oss börja med att notera att $x=0$ inte löser ekvationen, eftersom $\arccos(0)=\pi/2$ och $\arctan(0)=0$. Under antagandet att $x\neq 0$ (så att $\tan(\arccos(x))$ är definierat) gäller det att

$$\begin{aligned}
&\arccos(x)=\arctan(2\sqrt{3}\,x) \quad\Rightarrow\quad \tan\big(\arccos(x)\big)=\tan\big(\arctan(2\sqrt{3}\,x)\big)\\
&\frac{\sin\big(\arccos(x)\big)}{\cos\big(\arccos(x)\big)}=2\sqrt{3}x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=2\sqrt{3}\,x \quad\Rightarrow\quad \sqrt{1-x^2}=2\sqrt{3}\,x^2 \quad\Rightarrow\\
&1-x^2=12x^4 \quad\Leftrightarrow\quad x^4+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{12}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x^2+\frac{1}{24}\right)^2=\frac{1}{24^2}+\frac{1}{12} \quad\Leftrightarrow\\
&\left(x^2+\frac{1}{24}\right)^2=\frac{1+2\cdot 24}{24^2} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+\frac{1}{24}=\pm\frac{7}{24} \quad\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{1}{4} \quad \text{eller} \quad x^2=-\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

och eftersom $x\in\mathbb{R}$ så har denna ekvation lösningarna $x=\pm 1/2$. Då vi ej har ekvivalens genom våra beräkningar så prövar vi lösningarna i ursprungsekvationen:

$$\begin{aligned}
&\underline{x=1/2}:\arccos\frac{1}{2}-\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0\\
&\underline{x=-1/2}:\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arctan(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi\neq 0.
\end{aligned}$$

Alltså är $x=1/2$ den enda lösningen till ekvationen.

5. Vi sätter in $z = i\sqrt{2}$ i polynomet:

$$p\big(i\sqrt{2}\big) = \big(i\sqrt{2}\big)^5 + 2\big(i\sqrt{2}\big)^3 - 2\big(i\sqrt{2}\big)^2 - 4 = i4\sqrt{2} - i4\sqrt{2} + 4 - 4 = 0,$$

vilket visar att $i\sqrt{2}$ är en rot till polynomet. Eftersom polynomet har reella koefficienter så måste även $-i\sqrt{2}$ vara en rot till polynomet. Faktorsatsen säger oss då att polynomet delas av

$$(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2}) = z^2 + 2,$$

och med hjälp av polynomdivision fås

$$p(z) = (z^2 + 2)(z^3 - 2).$$

De övriga rötterna till polynomet fås alltså då $z^3 - 2 = 0$. Detta är en binomisk ekvation som vi löser som följer. Genom att ansätta $z = |z|e^{i\varphi}$ får vi att

$$z^3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^3 e^{3i\varphi} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z|^3 = 2 \\ 3\varphi = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = 2^{1/3} \\ \varphi = \frac{2\pi n}{3} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

vilket (för $n = 0, 1, 2$) ger lösningarna

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/3} \\ z_1 &= 2^{1/3} e^{i2\pi/3} = 2^{1/3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z_2 &= 2^{1/3} e^{i4\pi/3} = -2^{1/3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

vilket tillsammans med $z = \pm i\sqrt{2}$ ger alla rötter till polynomet.

6. Uttrycket

$$\arctan\sqrt{\ln\frac{2x-3}{x-4}}$$

är definierat då $x \neq 4$, $(2x-3)/(x-4) > 0$ och $\ln\big((2x-3)/(x-4)\big) \geq 0$ (kom ihåg att $D_{\arctan} = \mathbb{R}$). Eftersom

$$\ln\frac{2x-3}{x-4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x-4} \geq 1$$

så inkluderar detta villkoret $(2x-3)/(x-4) > 0$. Största möjliga definitionsmängd ges alltså av villkoren

$$\frac{2x-3}{x-4} \geq 1 \text{ och } x \neq 4.$$

För att studera när olikheten gäller skriver vi om uttrycket:

$$\frac{2x-3}{x-4} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x-4} - \frac{x-4}{x-4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-4} \geq 0.$$

Genom att konstruera en teckentabell

		-1		4	
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-4$	-	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x-4}$	+	0	-	$\nexists$	+

avläser vi att $(x+1)/(x-4) \geq 0$ då $x \leq -1$ eller $x > 4$ (vilket även uppfyller kravet $x \neq 4$). Alltså, största möjliga definitionsmängd ges av

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ eller } x > 4\}$$

Nu ska vi bestämma de $x \in \mathbb{R}$ sådana att $f(x) \geq \pi/4$. Eftersom arctan är en strängt växande funktion så gäller det att

$$\arctan\sqrt{\ln\frac{2x-3}{x-4}} \geq \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \arctan\sqrt{\ln\frac{2x-3}{x-4}} \geq \arctan(1) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\ln\frac{2x-3}{x-4}} \geq 1$$

Då $x \in D_f$ är $\ln\big((2x-3)/(x-4)\big) \geq 0$, och eftersom $\sqrt{y}$ är strängt växande för $y \geq 0$ så gäller det vidare att

$$\sqrt{\ln\frac{2x-3}{x-4}} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{2x-3}{x-4} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x-4} \geq e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2-e)x-(3-4e)}{x-4} \geq 0.$$

Eftersom $2-e<0$ så får vi att

$$\frac{(2-e)x-(3-4e)}{x-4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-\frac{3-4e}{2-e}}{x-4} \leq 0$$

och vi noterar att

$$a = \frac{3-4e}{2-e} = \frac{4e-3}{e-2} = \frac{4(e-2)+5}{e-2} = 4+\frac{5}{e-2} > 4.$$

Vi konstruerar en teckentabell för olikheten:

		4		a	
$x-4$	-	0	+	+	+
$x-a$	-	-	-	0	+
$\frac{x-a}{x-4}$	+	$\nexists$	-	0	+

vilket ger att $f(x) \geq \pi/4$ då

$$4 < x \leq \frac{4e-3}{e-2}.$$

7. För $z \in \mathbb{C}$ vill vi lösa ekvationen

$$\sin z = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2i}\big(e^{iz}-e^{-iz}\big) = 2.$$

Vi sätter $w = e^{iz}$ och får

$$\frac{1}{2i}\big(e^{iz}-e^{-iz}\big) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad w-\frac{1}{w} = 4i \quad \Leftrightarrow \quad w^2-1 = 4iw \quad \Leftrightarrow \quad w^2-4iw-1=0.$$

Denna komplexa andragradsekvation löser vi som följer:

$$w^2-4iw-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (w-2i)^2-(-2i)^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (w-2i)^2=-3 \quad \Leftrightarrow$$
$$w-2i=\pm i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad w=i(2\pm\sqrt{3})$$

Vi sätter $z = x+iy$ (där $x, y \in \mathbb{R}$), och relationen $w = e^{iz}$ ger

$$e^{iz} = i(2\pm\sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow \quad e^{i(x+iy)} = i(2\pm\sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-y}e^{ix} = (2\pm\sqrt{3})e^{i\pi/2}$$

eftersom $2\pm\sqrt{3}>0$. Detta ger vidare att

$$e^{-y}e^{ix} = (2\pm\sqrt{3})e^{i\pi/2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{-y} = 2\pm\sqrt{3} \\ x = \frac{\pi}{2}+2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -\ln(2\pm\sqrt{3}) \\ x = \frac{\pi}{2}+2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Vi drar slutsatsen att $\sin z = 2$ då

$$z = \frac{\pi}{2}+2\pi n - i\ln(2\pm\sqrt{3})$$

för alla $n \in \mathbb{Z}$.