

## Dugga 2 i Inledande matematisk analys

2014-12-15 kl. 8.00 - 12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng. För godkänt betyg räcker 9p. Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) Beräkna och förenkla  $\binom{46}{43}$  så långt som möjligt. (1p)

(b) Bestäm alla  $x \in \mathbb{R}$  sådana att  $\sin(x) = -\cos(2x)$ . (1p)

(c) Beräkna  $\arctan\left(\tan \frac{3\pi}{5}\right)$ . (1p)

2. Bestäm alla  $x \in \mathbb{R}$  sådana att

$$\frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{\ln(x - 1)} = 2.$$

3. Bestäm alla  $z \in \mathbb{C}$  sådana att  $(z + i)^4 = -4$ .  
(Lösningarna skall ges på formen  $z = x + iy$  där  $x, y \in \mathbb{R}$ .)

4. Bestäm alla  $x \in \mathbb{R}$  sådana att  $\sqrt{3}\cos(3x) - \sin(3x) + 2\sin(x) = 0$ .

5. Bestäm största möjliga definitionsmängd till

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2)$$

och visa sedan att  $f(x)$  med denna definitionsmängd ej är inverterbar.

6. Förenkla  $v$  så långt som möjligt, där

$$v = 2 \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

7. Visa att

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} & \text{om } 0 \leq x < \pi \\ -\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} & \text{om } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}.$$

## Lösningsskisser för TATA79 2014-12-15

1. (a) Från definitionen av binomialkoefficienten får vi

$$\binom{46}{43} = \frac{46!}{43!(46-43)!} = \frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}{43! \cdot 3 \cdot 2} = \frac{46 \cdot 45 \cdot 44}{3 \cdot 2} = 46 \cdot 15 \cdot 22 = 15180.$$

- (b) Eftersom  $\sin(-x) = -\sin(x)$  kan vi skriva ekvationen  $\sin(x) = -\cos(2x)$  som

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \sin(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) \quad \Leftrightarrow \\ 2x &= \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 2x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\end{aligned}$$

där  $n \in \mathbb{Z}$ .

- (c) Om  $v \in (-\pi/2, \pi/2)$  så är  $\arctan(\tan(v)) = v$ . För att använda detta skriver vi om tangens av vinkeln  $3\pi/5$  (som ej ligger i ovan nämnda intervall) som följer:

$$\tan \frac{3\pi}{5} = \tan\left(\frac{3\pi}{5} - \pi\right) = \tan\left(\frac{3\pi-5\pi}{5}\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right),$$

eftersom  $\tan(v - \pi) = \tan v$ . Då  $-2\pi/5 \in (-\pi/2, \pi/2)$  får vi

$$\arctan\left(\tan \frac{3\pi}{5}\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}.$$

2. Låt oss först ta reda på för vilka  $x$  den givna ekvationen är definierad. För att uttrycket

$$\frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{\ln(x - 1)}$$

ska vara definierat så krävs det att

$$2x^2 + x + 1 > 0 \quad \text{och} \quad x - 1 > 0 \quad \text{och} \quad \ln(x - 1) \neq 0.$$

Med hjälp av kvadratkomplettering noterar vi att

$$2x^2 + x + 1 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) > 0$$

för alla  $x \in \mathbb{R}$ . De två resterande kraven ger att

$$x > 1 \quad \text{och} \quad \ln(x - 1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \quad \text{och} \quad x \neq 2.$$

Under detta antagande löser vi ekvationen på följande sätt (där vi använder att  $\ln$  är en injektiv funktion):

$$\begin{aligned}\frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{\ln(x - 1)} &= 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2x^2 + x + 1) = 2\ln(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2x^2 + x + 1) = \ln(x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad 2x^2 + x + 1 &= (x - 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = -3.\end{aligned}$$

Då vi har gjort antagandet att  $x > 1$  och  $x \neq 2$  så löser inget av ovanstående  $x$  den ursprungliga ekvationen (det är enkelt att se att ekvationen ej är definierad för dessa värden på  $x$ ). Vi drar slutsatsen att ekvationen ej har några lösningar.

3. Vi inför beteckningen  $w = z + i$  och löser först ekvationen  $w^4 = -4$ . Genom att ansätta  $w = re^{iv}$  kan vi skriva ekvationen som

$$r^4 e^{i4v} = 4e^{i\pi}$$

eftersom  $-4 = 4e^{i\pi}$ . Vi löser ekvationen som följer

$$r^4 e^{i4v} = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4v = \pi + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ v = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Då vi skriver  $w = re^{iv}$  ger ovanstående värden på  $r$  och  $v$  fyra olika komplexa tal  $w$ , och dessa fås till exempel för  $n = 0, 1, 2, 3$ . Alltså,  $w^4 = -4$  har lösningarna

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = 1 + i \\ w_1 &= \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -1 + i \\ w_2 &= \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)) = -1 - i \\ w_3 &= \sqrt{2}e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)) = 1 - i. \end{aligned}$$

Eftersom  $z = w - i$  får vi lösningarna till ekvationen  $(z + i)^4 = -4$  som

$$\begin{aligned} z_0 &= w_0 - i = 1 & z_1 &= w_1 - i = -1 \\ z_2 &= w_2 - i = -1 - 2i & z_3 &= w_3 - i = 1 - 2i. \end{aligned}$$

4. Vi börjar med att försöka hitta  $C > 0$  och  $v \in \mathbb{R}$  sådana att

$$C \sin(3x + v) = \sqrt{3} \cos(3x) - \sin(3x)$$

för att sedan skriva om ekvationen med hjälp av detta. Additionssatsen för sinus ger att

$$C \sin(v) \cos(3x) + C \cos(v) \sin(3x) = \sqrt{3} \cos(3x) - \sin(3x),$$

och vi försöker hitta en lösning genom att jämföra dessa två uttryck termvis; alltså

$$\begin{cases} C \sin(v) = \sqrt{3} \\ C \cos(v) = -1 \end{cases} \Rightarrow C \sin(v) \cos(3x) + C \cos(v) \sin(3x) = \sqrt{3} \cos(3x) - \sin(3x).$$

Detta ger oss vidare

$$\begin{cases} C \sin(v) = \sqrt{3} \\ C \cos(v) = -1 \end{cases} \Rightarrow C^2 \sin^2(v) + C^2 \cos^2(v) = (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = 4 \Rightarrow C^2 = 4$$

vilket ger  $C = 2$  eftersom  $C > 0$ . Då  $C = 2$  får vi

$$\begin{cases} 2 \sin(v) = \sqrt{3} \\ 2 \cos(v) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(v) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(v) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftarrow v = \frac{2\pi}{3}.$$

Med hjälp av additionssatsen för sinus kan vi nu enkelt kontrollera att

$$2 \sin(3x + 2\pi/3) = \sqrt{3} \cos(3x) - \sin(3x).$$

Med hjälp av denna likhet kan vi skriva den ursprungliga ekvationen som

$$\begin{aligned} 2 \sin(3x + 2\pi/3) + 2 \sin(x) &= 0 \Leftrightarrow \sin(3x + 2\pi/3) = \sin(-x) \Leftrightarrow \\ 3x + \frac{2\pi}{3} &= -x + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 3x + \frac{2\pi}{3} = \pi - (-x) + 2\pi n \Leftrightarrow \\ 4x &= -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 2x = -\frac{2\pi}{3} + \pi + 2\pi n \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi n \end{aligned}$$

där  $n \in \mathbb{Z}$ .

5. För att uttrycket

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2)$$

ska vara definierat, krävs det att

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \quad \text{och} \quad \sqrt{x^2 + x - 2} - 2 > 0.$$

Det andra villkoret ger

$$\sqrt{x^2 + x - 2} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 2} > 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 > 0$$

(notera att ekvivalens gäller vid kvadrering eftersom båda sidor är positiva). Ovanstående beräkning visar även att  $x^2 + x - 2 \geq 0$  då  $\sqrt{x^2 + x - 2} - 2 > 0$  (eftersom  $x^2 + x - 2 > 4$  i detta fall); alltså räcker det med att studera olikheten  $x^2 - x + 6 > 0$ . Vi faktorerar polynomet genom att finna dess rötter

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \\ x = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} &\Leftrightarrow x = -3 \quad \text{eller} \quad x = 2, \end{aligned}$$

vilket ger att  $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ . Därefter gör vi en teckentabell:

|                  |   | -3 |   | 2 |   |
|------------------|---|----|---|---|---|
| $x + 3$          | - | 0  | + | + | + |
| $x - 2$          | - | -  | - | 0 | + |
| $(x - 2)(x + 3)$ | + | 0  | - | 0 | + |

Vi drar slutsatsen att

$$x^2 + x - 6 > 0 \Leftrightarrow x < -3 \quad \text{eller} \quad x > 2,$$

vilket ger största möjliga definitionsmängd

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < -3 \quad \text{eller} \quad x > 2\}.$$

För att visa att  $f(x)$  med denna definitionsmängd ej är inverterbar räcker det med att hitta två olika tal i definitionsmängden som ger samma funktionsvärde. Detta kan vi åstadkomma genom att hitta två olika  $x$  (med  $x < -3$  eller  $x > 2$ ) sådana att  $x^2 + x - 2$  antar samma värde. Med hjälp av kvadratkomplettering

$$x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2$$

noterar vi att grafen till andragradspolynomet ovan är symmetrisk kring  $x = -1/2$ . Det betyder att  $f(x)$  kommer ha samma funktionsvärde i punkterna  $-1/2 + a$  och  $-1/2 - a$  för  $a \in \mathbb{R}$ . Eftersom vi vill att dessa tal skall ligga i definitionsmängden kan vi välja till exempel  $a = 7/2$  och vi beräknar

$$\begin{aligned} f(-4) &= \ln(\sqrt{(-4)^2 + (-4) - 2} - 2) = \ln(\sqrt{10} - 2) \\ f(3) &= \ln(\sqrt{3^2 + 3 - 2}) = \ln(\sqrt{10} - 2). \end{aligned}$$

Eftersom  $-4 \in D_f$ ,  $3 \in D_f$  och  $f(-4) = f(3)$  så har vi visat att funktionen ej är injektiv och alltså ej inverterbar. (Notera att man egentligen inte behöver motivera *hur* man hittade sina specifika värden, det räcker med att visa att dessa värden ligger i definitionsmängden och att de ger samma funktionsvärde. Ovanstående resonemang är endast ett exempel på hur man kan resonera om man inte bara vill gissa.)

6. Låt oss börja med att beräkna  $\sin(v)$  för att undersöka om vi från detta kan sluta oss till vad  $v$  är. För enkelhetens skull inför vi följande beteckningar

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \alpha = \arcsin(a) \quad \text{och} \quad \beta = \arccos(a)$$

vilket ger att  $v = 2\alpha + \beta$ . Eftersom

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(a)) &= \cos(\arccos(a)) = a \\ \sin(\arccos(a)) &= \cos(\arcsin(a)) = \sqrt{1 - a^2} \end{aligned}$$

så får vi med hjälp av de trigonometriska additionsformlerna att

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha + \beta) &= \sin(2\alpha) \cos(\beta) + \cos(2\alpha) \sin(\beta) \\ &= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cos(\beta) + (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \sin(\beta) \\ &= 2a^2 \sqrt{1-a^2} + (1-a^2-a^2) \sqrt{1-a^2} = (2a^2 + 1 - 2a^2) \sqrt{1-a^2} \\ &= \sqrt{1-a^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Alltså har vi visat att  $\sin(v) = 1/3$ , vilket är ekvivalent med att

$$v = \arcsin(1/3) + 2\pi n \quad \text{eller} \quad v = \pi - \arcsin(1/3) + 2\pi n \quad (1)$$

där  $n \in \mathbb{Z}$ . Nu är dock  $v$  en given vinkel (och kan alltså bara sammanfalla med *ett* av alla de möjliga värden för  $v$  som vi har ovan), och vi måste resonera oss fram till vilken. Eftersom  $2\sqrt{2}/3 > 0$  så vet vi att  $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ . För  $0 \leq x \leq 1$  så är  $\arcsin(x)$  en strängt växande funktion, vilket vi använder oss av för att visa

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) > \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

vilket medför att  $2\alpha > 2\pi/4 = \pi/2$ . Detta visar att

$$\frac{\pi}{2} < 2\alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}.$$

Eftersom  $\arcsin(1/3) \in (0, \pi/2)$  så drar vi slutsatsen att den vinkel i ekvation (1) som uppfyller olikheten ovan ges av

$$v = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

7. Genom att använda oss av att  $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$ , med  $u = x/2$ , får vi att

$$\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - (\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2))}{1 + \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{2 \cos^2(x/2)} = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

vilket ger att

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \quad \text{eller} \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}.$$

Då  $0 \leq x < \pi$  är  $0 \leq x/2 < \pi/2$  vilket medför att  $\tan(x/2) \geq 0$ , dvs

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \quad \text{då} \quad 0 \leq x < \pi.$$

Då  $\pi < x \leq 2\pi$  är  $\pi/2 < x/2 \leq \pi$  vilket medför att  $\tan(x/2) \leq 0$ , dvs

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \quad \text{då} \quad \pi < x \leq 2\pi.$$