LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN7

Tentamen i Matematisk grundkurs 2010-08-16 kl 8-13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Bonus[1] från duggor kan tillgodoräknas på uppgift 1–3. Skriv **G** i den ruta på omslaget som hör till de uppgifter du har bonus på.

För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 13 resp. 17 poäng.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Lös ekvationen $|x+1| - |x-2| = 2x+1$. (2 p)

   (b) Lös ut y ur sambandet $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{y}}} = x$. (1 p)

2. (a) Finn alla reella x som uppfyller sambandet $\ln(x^2-5) - \ln(-x) = 2\ln 2$. (2 p)

   (b) Lös ekvationen $e^{6x} - 6e^{4x} - 7e^{2x} = 0$. (1 p)

3. (a) Beräkna $1413 + 1416 + 1419 \cdots + 2007 + 2010$. (1 p)

   (b) Beräkna $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$. (1 p)

   (c) Finn alla reella lösningar till ekvationen $3\sin 3x = \tan 3x$. (1 p)

4. Skriv $\cos^2 3x \sin 2x$ som en summa av cos- och/eller sin-termer.

   Lös sedan ekvationen $4\cos^2 3x \sin 2x + \sin 4x - \sin 8x = 1$.

5. Bestäm D_f samt (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} då $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$.

6. För minst ett av nollställena till $p(z) = 9z^4 - 24z^3 - 4z^2 + 8z - 4$ är Re z=Im z.

   Finn samtliga nollställen till $p(z)$.

7. Finn alla x i intervallet $[-\pi, \pi]$ som uppfyller olikheten

$$\ln(2-\sin x) - \sin^3 x < \ln(2-\cos 2x) - \cos^3 2x$$

.

[1] Godkänd dugga 1 ger godkänt på uppgift 1
Minst 6 poäng på dugga 2 ger godkänt på uppgift 2, godkänd dugga 2 ger godkänt på uppgift 2 och 3.

Tentamen i TTIT02, 2010-08-16, lösningsförslag

1. (a) Eftersom $|x+1| = 0 \Leftrightarrow x = -1$ och $|x-2| = 0 \Leftrightarrow x = 2$ fås följande tre fall:
   Fallet $x \leq -1$ ger $-(x+1) + (x-2) = 2x+1 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$, som tillhör intervallet.
   Fallet $-1 \leq x \leq 2$ ger $(x+1) + (x-2) = 2x+1 \Leftrightarrow -1 = 1$, som saknar lösning.
   Fallet $x \geq 2$ ger $(x+1) - (x-2) = 2x+1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$, som ej tillhör intervallet.
   Svar: $x = -2$

   (b) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{y}}} = x \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{y}} = \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+\frac{1}{y}} = \dfrac{1}{x} - 1\ (x \neq 0) \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}-1}\ (x \neq 0, x \neq 1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}-1} - 1\ (x \neq 0, x \neq 1) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x}-1} - 1} = \dfrac{1}{\frac{x}{1-x} - 1} = \dfrac{1-x}{x-(1-x)} = \dfrac{1-x}{2x-1}\ (x \neq 0, x \neq 1, x \neq \dfrac{1}{2})$.
   Svar: $y = \dfrac{1-x}{2x-1}\ (x \neq 0, x \neq 1, x \neq \dfrac{1}{2})$

2. (a) $\ln(x^2-5)$ är definierat för $x > \sqrt{5}$ och $x < -\sqrt{5}$, och $\ln(-x)$ är definierat för $x < 0$, dvs hela uttrycket är definierat för $x < -\sqrt{5}$. För $x < -\sqrt{5}$ fås $\ln(x^2-5) - \ln(-x) = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln(x^2-5) = \ln(-x) + \ln(2^2) = \ln(-4x) \Leftrightarrow$ (ln strängt växande) $x^2 - 5 = -4x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ (ty $-5 < -\sqrt{5}$ men $1 > -\sqrt{5}$). Svar: $x = -5$

   (b) Med $t = e^{2x} > 0$ fås $e^{6x} - 6e^{4x} - 7e^{2x} = 0 \Leftrightarrow t^3 - 6t^2 - 7t = 0,\ t > 0 \Leftrightarrow t(t^2-6t-7) = 0,\ t > 0 \Leftrightarrow t(t-7)(t+1) = 0,\ t > 0 \Leftrightarrow t = 7 \Leftrightarrow e^{2x} = 7 \Leftrightarrow 2x = \ln 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln 7$.
   Svar: $x = \dfrac{1}{2}\ln 7$

3. (a) Aritmetisk summa med differens 3 och (2010-1413)/3+1=200 termer. Summan blir $200 \cdot \dfrac{1413+2010}{2} = 342300$. Svar: 342300

   (b) $\arcsin\dfrac{1}{3} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ så ur en rätvinklig triangel med sidor 1, 3 och $\sqrt{3^2-1^2} = \sqrt{8}$ fås $\arcsin\dfrac{1}{3} = \arccos\dfrac{\sqrt{8}}{3}$. Då $\cos(\arccos x) = x$ för alla $x \in [-1,1]$ fås $\cos(\arcsin\dfrac{1}{3}) = \cos(\arccos\dfrac{\sqrt{8}}{3}) = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$. Svar: $\dfrac{\sqrt{8}}{3}$

   (c) $3\sin 3x = \tan 3x \Leftrightarrow 3\sin 3x = \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} \Leftrightarrow (3 - \dfrac{1}{\cos 3x})\sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0$ eller $\cos 3x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = n\pi$ eller $3x = \pm\arccos\dfrac{1}{3} + 2n\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{n\pi}{3}$ eller $x = \pm\dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{1}{3} + \dfrac{2n\pi}{3}$, där n är ett godtyckligt heltal.
   Svar: $x = \dfrac{n\pi}{3}$ eller $x = \pm\dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{1}{3} + \dfrac{2n\pi}{3}$, n heltal.

4. Eulers formler ger $\cos^2 3x \sin 2x = (\dfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2})^2(\dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}) = \dfrac{1}{8i}(e^{6ix}+2+e^{-6ix})(e^{2ix} - e^{-2ix}) = \dfrac{1}{8i}(e^{8ix} - e^{-8ix} - e^{4ix} + e^{-4ix} + 2e^{2ix} - 2e^{-2ix}) = \dfrac{1}{4}\sin 8x - \dfrac{1}{4}\sin 4x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$.
   Då fås $4\cos^2 3x \sin 2x + \sin 4x - \sin 8x = 1 \Leftrightarrow \sin 8x - \sin 4x + 2\sin 2x + \sin 4x - \sin 8x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $2x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + n\pi$ eller $x = \dfrac{5\pi}{12} + n\pi,\ n$ heltal. Svar: $\cos^2 3x \sin 2x = \dfrac{1}{4}\sin 8x - \dfrac{1}{4}\sin 4x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ samt $x = \dfrac{\pi}{12} + n\pi$ eller $x = \dfrac{5\pi}{12} + n\pi$, n heltal.

5. $\arcsin t$ är definierad för $-1 \leq t \leq 1$. $-1 \leq \dfrac{x+2}{x-3} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{-(x-3)-(x+2)}{x-3} \leq 0$ och $\dfrac{(x+2)-(x-3)}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x-3} \leq 0$ och $\dfrac{5}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x-3} \leq 0$ och $x < 3 \Leftrightarrow$ $1-2x \geq 0$ och $x < 3 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$. Alltså har $f(x) = \arcsin(\dfrac{x+2}{x-3})$ definitionsmängd $D_f =]-\infty, \dfrac{1}{2}]$.

   $y = \arcsin(\dfrac{x+2}{x-3})$ $(\in [-\pi/2, \pi/2]) \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-3} = \sin y \Leftrightarrow x+2 = (x-3)\sin y \Leftrightarrow 3\sin y + 2 = x(\sin y - 1) \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sin y + 2}{\sin y - 1} = f^{-1}(y)$.

   Svar: $D_f =]-\infty, \dfrac{1}{2}]$ och $f^{-1}(y) = \dfrac{3\sin y + 2}{\sin y - 1}$.

6. Ansätt $z = t + ti = t(1+i)$ (t reellt) som ett nollställe till $p(z) \Rightarrow p(t(1+i)) = 9(1+i)^4t^4 - 24(1+i)^3t^3 - 4(1+i)^2t^2 + 8(1+i)t - 4 = -36t^4 + 48(1-i)t^3 - 8it^2 + 8(1+i)t - 4 = -36t^4 + 48t^3 + 8t - 4 + i(-48t^3 - 8t^2 + 8t) = 0$. Imaginärdelen lika med noll ger $-48t^3 - 8t^2 + 8t = -48t(t^2 + \dfrac{t}{6} - \dfrac{1}{6}) = -48t(t - \dfrac{1}{3})(t + \dfrac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow$ $t = 0$, $t = \dfrac{1}{3}$, $t = -\dfrac{1}{2}$. Dessa tre t-värden insatta i realdelen $-36t^4 + 48t^3 + 8t - 4$ ger -4, 0 resp. $-\dfrac{65}{4}$, vilket betyder att för $t = \dfrac{1}{3}$ är $p(t(1+i)) = p(\dfrac{1+i}{3}) = 0$. Eftersom $p(z)$ har reella koefficienter är även $\overline{\dfrac{1+i}{3}} = \dfrac{1-i}{3}$ ett nollställe och $p(z)$ är delbart med $q(z) = (z - \dfrac{1+i}{3})(z - \dfrac{1-i}{3}) = z^2 - \dfrac{2z}{3} + \dfrac{2}{9}$. Polynomdivision ger $\dfrac{p(z)}{q(z)} = 9z^2 - 18z - 18 = 9(z^2 - 2z - 2) = 9(z - 1 - \sqrt{3})(z - 1 + \sqrt{3})$ så övriga nollställen är $1 \pm \sqrt{3}$.

   Svar: $z = \dfrac{1 \pm i}{3}$ och $z = 1 \pm \sqrt{3}$.

7. Funktionen $f(t) = \ln(2-t) - t^3$ är strängt avtagande (för $t < 2$) ty $\ln(2-t)$ och $-t^3$ är båda strängt avtagande. Då gäller att den givna olikheten $f(\sin x) < f(\cos 2x)$ är uppfylld om och endast om $\sin x > \cos 2x$. $\sin x - \cos 2x = \sin x - 1 + 2\sin^2 x = 2(\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}) = 2((\sin x + \dfrac{1}{4})^2 - \dfrac{9}{16}) > 0 \Leftrightarrow (\sin x + \dfrac{1}{4})^2 > \dfrac{9}{16} \Leftrightarrow \sin x + \dfrac{1}{4} > \dfrac{3}{4}$ eller $\sin x + \dfrac{1}{4} < -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x > \dfrac{1}{2}$ eller $\sin x < -1$ (omöjligt) $\Leftrightarrow \sin x > \dfrac{1}{2}$, vilket på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ är ekvivalent med $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$.

   Svar: $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$