

Tentamen i Matematisk Grundkurs

2014-04-23 kl. 08.00 – 13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng¹ till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9. För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 12 resp. 15 poäng.

Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $|2 + 2x| = x - 1$. (1p)
(b) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $\ln(x - 2) + \ln(x + 1) = 2 \ln 2$. (2p)
2. (a) Beräkna $\arctan\left(\tan \frac{3\pi}{5}\right)$. (1p)
(b) Visa att $16 \cos^3(x) \sin^2(x) = 2 \cos(x) - \cos(3x) - \cos(5x)$. (2p)
3. Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\cos(2x) - 2\sqrt{3} \sin(x) \cos(x) = 1.$$

4. För polynomet $p(z) = z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10$ gäller det att $p(1 - i) = 0$. Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att $p(z) = 0$.
5. Bestäm största möjliga definitionsmängd till funktionen

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2 + 2x - 5}{1 + x}\right)}$$

och visa att funktionen ej är inverterbar med denna definitionsmängd.

6. Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\arctan(2x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

7. Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k z^{n-k} i^k = \sqrt{3} - i.$$

¹Godkänd dugga 1 ger 2 bonuspoäng. Minst 6 poäng på dugga 2 ger 2 bonuspoäng, godkänd dugga 2 ger ytterligare 2 bonuspoäng, dvs godkänd dugga 2 ger totalt 4 bonuspoäng.

Lösningsskisser för TTIT02 2014-04-23

1. (a) För absolutbeloppet gäller det att

$$|2x + 2| = \begin{cases} 2x + 2 & \text{om } x \geq -1 \\ -(2x + 2) & \text{om } x \leq -1 \end{cases}$$

och vi delar upp problemet i två fall:

$x \geq -1$: I detta fall blir ekvationen

$$2x + 2 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3.$$

Eftersom $-3 \leq -1$ så bortser vi från denna lösning.

$x \leq -1$: I detta fall blir ekvationen

$$-2x - 2 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}.$$

Eftersom $-1/3 \geq -1$ så bortser vi även från denna lösning. Vi drar slutsatsen att det inte finns några $x \in \mathbb{R}$ som löser den ursprungliga ekvationen.

- (b) Eftersom $\ln(x)$ endast är definierad då $x > 0$ är den givna ekvationen definierad endast för $x \in \mathbb{R}$ sådana att

$$x - 2 > 0 \text{ och } x + 1 > 0,$$

vilket sammantaget ger att $x > 2$. Under antagandet att $x > 2$ kan vi använda logaritmlagarna för att skriva

$$\ln(x - 2) + \ln(x + 1) = 2 \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln((x - 2)(x + 1)) = \ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)(x + 1) = 4,$$

eftersom $\ln$ är en injektiv funktion. Vi löser vidare ekvationen:

$$\begin{aligned} (x - 2)(x + 1) = 4 & \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2} & \Leftrightarrow x = 3 \text{ eller } x = -2. \end{aligned}$$

Eftersom den ursprungliga ekvationen endast är definierad för $x > 2$ så bortser vi från lösningen $x = -2$. Alltså, den enda lösningen till ekvationen ges av $x = 3$.

2. (a) För $-\pi/2 < x < \pi/2$ gäller det att $\arctan(\tan x) = x$, och eftersom

$$\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{5} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

erhåller vi

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5},$$

eftersom $\arctan(\tan(x)) = x$ då $-\pi/2 < x < \pi/2$.

- (b) Vi använder oss av Eulers formler

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

för att skriva om uttrycket

$$\begin{aligned} 16 \cos^3(x) \sin^2(x) &= \frac{16}{2^3(2i)^2}(e^{ix} + e^{-ix})^3(e^{ix} - e^{-ix})^2 \\ &= -\frac{1}{2}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= -\frac{1}{2}(e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - 2e^{ix} - 2e^{-ix}) \\ &= -\cos(5x) - \cos(3x) + 2\cos(x). \end{aligned}$$

3. Eftersom $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ kan vi skriva om ekvationen som

$$\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 1.$$

För att lösa denna ekvation inför vi en "hjälpvinkel" i vänsterledet; alltså, vi vill finna $C > 0$ och $v \in \mathbb{R}$ sådana att

$$C \sin(2x + v) = \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x).$$

Genom att använda additionsformeln för sinus ger detta

$$C \sin(2x) \cos(v) + C \cos(2x) \sin(v) = \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x),$$

vilket ger följande ekvationer för C och v :

$$\begin{cases} C \cos(v) = -\sqrt{3} \\ C \sin(v) = 1 \end{cases} \Rightarrow C^2 \cos^2(v) + C^2 \sin^2(v) = (-\sqrt{3})^2 + 1^2 \Rightarrow C = 2,$$

då vi jämför koefficienterna framför $\cos(2x)$ och $\sin(2x)$. Med $C = 2$ blir ekvationssystemet

$$\begin{cases} \cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(v) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

vilket löses av $v = 5\pi/6$. Vi har således visat att

$$2 \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x),$$

vilket gör att den ursprungliga ekvationen kan skrivas som

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $\sin(\pi/6) = 1/2$ så har denna ekvation lösningarna

$$\begin{aligned} 2x + \frac{5\pi}{6} &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 2x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \\ 2x &= -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 2x = 2\pi n \quad \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{\pi}{3} + \pi n \quad \text{eller} \quad x = \pi n \end{aligned}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

4. Eftersom polynomet har reella koefficienter så måste även $1 + i$ vara en rot till $p(z)$, vilket medför att

$$(z - 1 - i)(z - 1 + i) = z^2 - 2z + 2$$

delar $p(z)$ enligt faktorsatsen. Polynomdivision ger vidare att

$$p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2z + 5).$$

Att $p(z) = 0$ innebär att antingen $z^2 - 2z + 2 = 0$ (vilket ger oss $z = 1 + i$ eller $z = 1 - i$) eller $z^2 - 2z + 5 = 0$. Vi beräknar

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 5 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - 1)^2 - 1 + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - 1)^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \\ z - 1 &= \pm 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 \pm 2i. \end{aligned}$$

Alltså, rötterna till polynomet ges av $1 + i, 1 - i, 1 + 2i, 1 - 2i$.

5. Eftersom $\ln(x)$ är definierad för $x > 0$ och $\sqrt{x}$ är definierad för $x \geq 0$ så måste följande gälla för att det givna uttrycket skall vara definierat:

$$x \neq -1, \quad \frac{x^2 + 2x - 5}{1 + x} > 0 \quad \text{och} \quad \ln\left(\frac{x^2 + 2x - 5}{1 + x}\right) \geq 0.$$

Eftersom $\ln$ är en växande funktion och $\ln(1) = 0$ är de sista två villkoren ekvivalenta med att

$$\frac{x^2 + 2x - 5}{1 + x} \geq 1.$$

Låt oss nu skriva om denna olikhet:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 5}{1 + x} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 5}{1 + x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 5 - (1 + x)}{1 + x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x^2 + x - 6}{1 + x} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 3)}{1 + x} \geq 0 \end{aligned}$$

och vi studerar olikheten med hjälp av en teckentabell:

		-3		-1		2	
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$x + 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{(x-2)(x+3)}{x+1}$	-	0	+	$\neq$	-	0	+

Vi kan avläsa att $(x - 2)(x + 3)/(x + 1) \geq 0$ då

$$-3 \leq x < -1 \quad \text{eller} \quad x \geq 2.$$

Notera att dessa intervall utesluter punkten $x = -1$, vilken ej får vara med i definitionsmängden. Alltså, största möjliga definitionsmängd ges av

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < -1 \text{ eller } x \geq 2\}.$$

För att visa att funktionen ej är inverterbar beräknar vi

$$\begin{aligned} f(2) &= \sqrt{\ln\left(\frac{4 + 4 - 5}{3}\right)} = \sqrt{\ln(1)} = 0 \\ f(-3) &= \sqrt{\ln\left(\frac{9 - 6 - 5}{-2}\right)} = \sqrt{\ln(1)} = 0. \end{aligned}$$

Eftersom $2 \in D_f$, $-3 \in D_f$ och $f(2) = f(-3)$ är funktionen ej injektiv och alltså ej inverterbar.

6. Genom att tillämpa cosinus på båda sidor av ekvationen fås

$$\arctan(2x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(\arctan(2x) + \arccos(x)) = 0.$$

Med hjälp av additionssatsen för cosinus får vi att

$$\cos(\arctan(2x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(\arctan(2x)) \sin(\arccos(x)) = 0,$$

och eftersom

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

kan vi skriva om denna ekvation som

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}} - \frac{2x\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + 4x^2}} &= 0 \Leftrightarrow x = 2x\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } 1 = 2\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \\ x = 0 \text{ eller } 1 &= 4 - 4x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Då vi ej har ekvivalens genom hela lösningsgången, så prövar vi våra lösningskandidater i den ursprungliga ekvationen:

$x = 0$: $\arctan(0) + \arccos(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$. Alltså är $x = 0$ en lösning.

$x = \sqrt{3}/2$: $\arctan(\sqrt{3}) + \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/3 + \pi/6 = \pi/2$. Alltså är $x = \sqrt{3}/2$ en lösning

$x = -\sqrt{3}/2$: $\arctan(-\sqrt{3}) + \arccos(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3 + 5\pi/6 = \pi/2$. Alltså är $x = -\sqrt{3}/2$ en lösning.

Vi sammanfattar med de tre lösningarna till ekvationen: $0, \pm\sqrt{3}/2$.

7. Binomialsatsen säger oss att

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

och vi kan således skriva om

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k z^{n-k} i^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (-i)^k = (z-i)^n.$$

Alltså gäller det att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k z^{n-k} i^k = \sqrt{3} - i \quad \Leftrightarrow \quad (z-i)^n = \sqrt{3} - i,$$

vilket är en binomisk ekvation. Vi börjar med att skriva $\sqrt{3} - i$ på polär form; dvs vi vill hitta $r > 0$ och $v \in \mathbb{R}$ sådana att

$$re^{iv} = \sqrt{3} - i \quad \Rightarrow \quad r = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2,$$

vilket ger att

$$2e^{iv} = \sqrt{3} - i \quad \Leftrightarrow \quad \cos(v) + i\sin(v) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{6}$$

Alltså har vi visat att $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$. Vi sätter nu $w = z - i$ och vill således lösa ekvationen

$$w^n = 2e^{-i\pi/6},$$

vilket vi gör genom att ansätta $w = re^{iv}$:

$$\begin{aligned} w^n = 2e^{-i\pi/6} &\Leftrightarrow r^n e^{inv} = 2e^{-i\pi/6} &\Leftrightarrow &\begin{cases} r^n = 2 \\ nv = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} r = 2^{1/n} \\ v = -\frac{\pi}{6n} + \frac{2\pi m}{n} \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} & \end{aligned}$$

Alltså har ekvationen $w^n = \sqrt{3} - i$ precis n stycken lösningar som ges av

$$w_m = 2^{1/n} e^{i\left(-\frac{\pi}{6n} + \frac{2\pi m}{n}\right)} \quad m = 0, \dots, n-1,$$

vilket ger att den ursprungliga ekvationen också har n stycken lösningar som ges av

$$z_m = w_m + i = 2^{1/n} e^{i\left(-\frac{\pi}{6n} + \frac{2\pi m}{n}\right)} + i \quad m = 0, \dots, n-1.$$