

Tentamen i Matematisk Grundkurs

2014-08-19 kl. 14.00 – 19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng¹ till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9. För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 12 resp. 15 poäng.

Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) För vilka reella x är $3x + |1 - x| = 0$? (1p)

(b) Skriv $\sum_{k=3}^{202} 3 \cdot 2^{k-1}$ på enklast möjliga form. (1p)

(c) Beräkna $\sum_{k=1}^3 \binom{k+5}{k+2}$. (1p)

2. Lös ekvationen $\ln(2 - x) - 2 \ln x = \ln(x + 4)$.

3. (a) Cirkeln C går genom origo och har sin medelpunkt i $(2, -1)$. Linjen L går genom $(-1, -3)$ och $(2, 3)$. Bestäm alla skärningspunkter mellan C och L . (2p)

(b) Skriv $z = i\sqrt{3} - 3$ på polär form. (1p)

4. Bestäm definitionsmängden D_f och (om möjligt) inversen till $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x-2}}$.

5. Skriv $\cos x \sin^2 x$ som en summa av cos- och/eller sin-termer.

Lös också ekvationen $4 \cos x \sin^2 x = \sin x + \cos x$.

6. Beräkna $\arctan 3 + \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

7. Visa att $\sum_{k=1}^n \ln(k^2 + k + 1) - \sum_{k=1}^n \ln(k^2 + k) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} < 1$ för $n = 1, 2, 3, \dots$

¹Godkänd dugga 1 ger 2 bonuspoäng. Minst 6 poäng på dugga 2 ger 2 bonuspoäng, godkänd dugga 2 ger ytterligare 2 bonuspoäng, dvs godkänd dugga 2 ger totalt 4 bonuspoäng.

Lösningsskisser för TTIT02 2014-08-19

1. (a) Beloppet kan hanteras med falluppdelning. $|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{om } x \leq 1 \\ x - 1, & \text{om } x \geq 1. \end{cases}$

- $x \leq 1$ ger ekvationen $3x + (1 - x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$, som uppfyller villkoret $x \leq 1$.

- $x \geq 1$ ger ekvationen $3x + x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{4}$ som inte uppfyller villkoret $x \geq 1$.

(Alt: Redan från början syns att x måste vara negativ för att vänsterledet ska kunna bli 0, och för $x < 0$ kan ekvationen skrivas $3x + (1 - x) = 0$.)

Svar: $x = -1/2$.

- (b) Detta är en geometrisk summa med första term = $3 \cdot 2^2 = 12$, kvot = 2 och antal termer = $202 - 3 + 1 = 200$. Därmed blir $\sum_{k=3}^{202} 3 \cdot 2^{k-1} = 12 \cdot \frac{2^{200} - 1}{2 - 1} = 12 \cdot (2^{200} - 1)$.

Svar: $12 \cdot (2^{200} - 1)$

- (c) $\sum_{k=1}^3 \binom{k+5}{k+2} = \binom{6}{3} + \binom{7}{4} + \binom{8}{5} = \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 = 20 + 35 + 56 = 111$.

Svar: 111.

2. Logaritmerna är definierade då $2 - x > 0$, $x > 0$ och $x + 4 > 0$, dvs då $0 < x < 2$. För dessa x fås $\ln(2 - x) - 2 \ln x = \ln(x + 4) \iff \ln(2 - x) = \ln x^2 + \ln(x + 4) \iff \ln(2 - x) = \ln(x^2(x + 4)) \iff \ln$ är injektiv $\iff 2 - x = x^2(x + 4) \iff x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$. Vi ser att $x = -1$ är en lösning till denna ekvation, och polynomdivision ger $x^3 + 4x^2 + x - 2 = (x + 1)(x^2 + 3x - 2)$ och slutligen fås $x^2 + 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

De tre kandidaterna -1 , $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$ måste sedan kontrolleras mot villkoret $0 < x < 2$, och vi ser att endast $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ uppfyller villkoret (använd att $4 < \sqrt{17} < 5$).

Svar: $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.

3. (a) En cirkel med medelpunkt $(2, -1)$ har ekvationen $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$. Cirkeln ska gå genom origo, så $(x, y) = (0, 0)$ ska uppfylla ekvationen. Således är $r^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$, dvs cirkelns ekvation är $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

Linjen genom punkterna $(-1, -3)$ och $(2, 3)$ har ekvationen $y - 3 = \frac{3 - (-3)}{2 - (-1)}(x - 2) \iff y = 2x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Skärningspunkterna fås ur ekvationssystemet } \begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 \\ y = 2x - 1 \end{cases} &\iff \\ \begin{cases} (x - 2)^2 + (2x)^2 = 5 \\ y = 2x - 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 5x^2 - 4x - 1 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ eller } x = -1/5 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \iff \\ (x, y) = (1, 1) \text{ eller } (x, y) = (-1/5, -7/5). \end{aligned}$$

Svar: Skärningspunkterna är $(1, 1)$ och $(-1/5, -7/5)$.

(b) $z = i\sqrt{3} - 3 = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Big/ = 2\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)$. Vi söker en

vinkel v sådan att $\begin{cases} \cos v = -\sqrt{3}/2 \\ \sin v = 1/2 \end{cases}$ och vi ser att t.ex. $v = 5\pi/6$ uppfyller detta (samtliga

lösningar är $v = 5\pi/6 + 2n\pi$). Alltså är $z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} \cdot e^{5\pi i/6}$

Svar: $2\sqrt{3} \cdot e^{5\pi i/6}$.

4. f är definierad då $\frac{1-x}{x-2} \geq 0 \iff \Big/ \text{t.ex. teckentabell på vanligt sätt} \Big/ \iff 1 \leq x < 2$.

För dessa x fås $y = \sqrt{\frac{1-x}{x-2}} \Rightarrow y^2 = \frac{1-x}{x-2} \iff y^2(x-2) = 1-x \iff x(1+y^2) = 1+2y^2 \iff x = \frac{1+2y^2}{1+y^2}$. Eftersom varje y ger högst ett x -värde, har vi visat att inversen finns och att $f^{-1}(y) = \frac{1+2y^2}{1+y^2}$.

Svar: $D_f = \{x : 1 \leq x < 2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{1+2x^2}{1+x^2}$.

5. $\cos x \sin^2 x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix} - e^{ix} - e^{-ix}}{-8} =$
 $= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = -\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x).$

Med hjälp av denna omskrivning fås att

$$4 \cos x \sin^2 x = \sin x + \cos x \iff -\cos 3x + \cos x = \sin x + \cos x \iff \cos 3x = -\sin x \iff$$

$$\cos 3x = \sin(-x) \iff \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \iff \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + x + 2n\pi \\ \text{eller} \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2n\pi \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

Svar: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \end{cases}$ där n är godtyckligt heltal.

6. Låt $v = \arctan 3 + \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Först gör vi några uppskattningar:

- $0 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$, eftersom $3 > 0$
- $\frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) < \pi$, eftersom $-1 < -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0$.

Härav följer att $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$.

Tittar vi därefter på tangens för vinkeln så fås

$$\begin{aligned}\tan v &= \frac{\tan(\arctan 3) + \tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{1 - \tan(\arctan 3) \cdot \tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} = \\ &= \frac{3 + \tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{1 - 3 \cdot \tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} = \frac{\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{där vi utnyttjat att } \sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) &> 0 \text{ eftersom } \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) < \pi \\ &= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1.\end{aligned}$$

Av detta drar vi slutsatsen att $v = \frac{\pi}{4} + n\pi$ för något heltal n , och eftersom $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$ så följer att enda möjligheten är att $v = \frac{5\pi}{4}$.

$$\text{Svar: } v = \frac{5\pi}{4}.$$

7. Vänstra olikheten följer av följande resonemang.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \ln(k^2 + k + 1) - \sum_{k=1}^n \ln(k^2 + k) &= \sum_{k=1}^n (\ln(k^2 + k + 1) - \ln(k^2 + k)) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k^2 + k}\right) < \\ < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} < 1 \text{ och } \ln x < x - 1 \text{ då } x > 0, x \neq 1 \\ < \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2 + k} - 1\right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k}.\end{aligned}$$

Högra olikheten följer av

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1\end{aligned}$$

för $n = 1, 2, 3, \dots$ v.s.v.