LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA79
Provkod: TEN3

Tentamen i Inledande matematisk analys 2015-08-18 kl 14-19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng[1] till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9.

För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 12 resp. 15 poäng.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Lös olikheten $\dfrac{x+2}{x} \leq x$. (2 p)

   (b) Beräkna $\dbinom{14}{11}$. (1 p)

2. (a) Förenkla uttrycket $e^{-3\ln 2} \cdot \ln \dfrac{9}{e^8} - \dfrac{1}{4}\ln 3$. (1 p)

   (b) Lös ekvationen $2\ln(2-x) - \ln\left(\dfrac{10}{3} - x\right) = \ln 3$. (2 p)

3. (a) Vilka $x \in \mathbf{R}$ uppfyller sambandet $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right)$? (1 p)

   (b) Bestäm $|i\cos x - \sin x|$ för alla $x \in \mathbf{R}$. (1 p)

   (c) Beräkna $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$. (1 p)

4. Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 + 2\sqrt{2}\, i = 0$.

   Svara på rektangulär form, d v s på formen $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$.

5. I en aritmetisk summa med 20 termer är produkten av 5:e och 6:e termen lika med första temen och om man drar bort 2 från första termen får man dubbla 5:e termen. Bestäm alla värden som summan kan anta.

6. Lös ekvationen $6\sin 3x = 5 + 8\cos 3x$.

7. Låt $0 \neq x \in \mathbf{R}$. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-k^2 x} \leq \frac{1 - e^{-n^2 x}}{e^x - 1}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

[1]Godkänd dugga 1 ger 2 bonuspoäng. Minst 6 poäng på dugga 2 ger 2 bonuspoäng, godkänd dugga 2 ger ytterligare 2 bonuspoäng, d v s godkänd dugga 2 ger totalt 4 bonuspoäng.

Lösningsförslag

1. (a) $\dfrac{x+2}{x} \le x \iff \dfrac{x^2-(x+2)}{x} \ge 0 \iff \dfrac{(x+1)(x-2)}{x} \ge 0$. Teckentabellen

x		-1		0		2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{(x+1)(x-2)}{x}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

visar att olikheten gäller då $-1 \le x < 0$ eller $x \ge 2$. Svar: $-1 \le x < 0$ eller $x \ge 2$.

(b) $\dbinom{14}{11} = \dbinom{14}{14-11} = \dbinom{14}{3} = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364.$ Svar: 364.

2. (a) $e^{-3\ln 2} \cdot \ln \dfrac{9}{e^8} - \dfrac{1}{4}\ln 3 = e^{\ln\left(2^{-3}\right)} \cdot \left(\ln 9 - \ln\left(e^8\right)\right) - \dfrac{1}{4}\ln 3 = \dfrac{1}{8}\left(2\ln 3 - 8\right) - \dfrac{1}{4}\ln 3 = -1.$

Svar: -1.

(b) Logaritmuttrycken är definierade då $2-x>0$ och $\dfrac{10}{3}-x>0$, dvs då $x<2$.

För dessa x är $2\ln(2-x) - \ln\left(\dfrac{10}{3}-x\right) = \ln 3 \iff \ln(2-x)^2 = \ln\left(3\left(\dfrac{10}{3}-x\right)\right) \iff$

$\iff \ln(2-x)^2 = \ln(10-3x) \iff$ / ln är injektiv / $\iff (2-x)^2 = 10-3x \iff$

$\iff x=3$ eller $x=-2$. Men av dessa är det endast $x=-2$ som uppfyller villkoret $x<2$, dvs $x=-2$ är enda lösningen.

Svar: $x=-2$.

3. (a) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right) \iff \begin{cases} x-\dfrac{\pi}{5} = x+\dfrac{\pi}{5}+2n\pi \\ \text{eller} \\ x-\dfrac{\pi}{5} = \pi - \left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)+2n\pi \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{5} = 2n\pi \\ \text{eller} \\ 2x = \pi+2n\pi \end{cases}$ där n är heltal. Den övre ekvationen saknar lösningar

medan den undre har lösningarna $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$. Svar: $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ där n är heltal.

(b) Då x är reellt så är $|i\cos x - \sin x| = \sqrt{(-\sin x)^2+(\cos x)^2} = \sqrt{1} = 1.$ Svar: 1.

(c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) + \sin\dfrac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right).$

Eftersom $0 < \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) < \pi \implies \sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) > 0$ så är

$\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Därav följer att $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

Svar: $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

4. $z^3 + 2\sqrt{2}\,i = 0 \iff z^3 = -2\sqrt{2}\,i \iff z^3 = 2^{3/2}\cdot e^{-i\pi/2}$. Låt $z = re^{iv}$ där $r \geq 0$ och $v \in \mathbf{R}$ så fås

$z^3 = 2^{3/2}\cdot e^{-i\pi/2} \iff r^3 e^{3iv} = 2^{3/2}\cdot e^{-i\pi/2} \iff$

$\iff \begin{cases} (Abs):\ r^3 = 2^{3/2},\ r \geq 0 \\ (Arg):\ 3v = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ v = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3},\ n \text{ är heltal} \end{cases}$ så de tre

lösningarna blir $z_1 = \sqrt{2}e^{-\pi i/6} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/2} = i\sqrt{2}$

samt

$z_3 = \sqrt{2}e^{7\pi i/6} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: $z = i\sqrt{2}$ eller $z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Låt första termen vara a och skillnaden mellan termerna d, så att summan är $s = \sum_{k=0}^{19}(a + k\cdot d)$. De båda villkoren ger då sambanden $\begin{cases} (a+4d)(a+5d) = a \\ a - 2 = 2(a+4d) \end{cases} \iff$

$\begin{cases} (a+4d)(a+5d) = a \\ a = -2 - 8d \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} (-2-4d)(-2-3d) = -2-8d \\ a = -2-8d \end{cases} \iff \begin{cases} 12d^2 + 22d + 6 = 0 \\ a = -2-8d \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} d = -3/2 \text{ eller } d = -1/3 \\ a = -2-8d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 10,\ d = -3/2 \\ \text{eller} \\ a = 2/3,\ d = -1/3. \end{cases}$

Den aritmetiska summan $s = \sum_{k=0}^{19}(a + k\cdot d) = 20\cdot\frac{a + (a+19d)}{2} = 10(2a + 19d)$, vilket i de två fallen ger $s = -85$ (då $a = 10,\ d = -3/2$) respektive $s = -50$ (då $a = 2/3,\ d = -1/3$).

Svar: Summan kan anta värdena -85 eller -50.

6. $6\sin 3x = 5 + 8\cos 3x \iff 6\sin 3x - 8\cos 3x = 5 \iff$

$\iff 10\left(\frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x\right) = 5 \iff \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = \frac{1}{2} \iff$

$\iff \Big/ \cos v = \frac{3}{5}, \sin v = -\frac{4}{5}$ har en lösning $v = -\arccos\frac{3}{5}\ \left(= -\arcsin\frac{4}{5}\right) \Big/ \iff$

$\iff \cos\left(-\arccos\frac{3}{5}\right)\sin 3x + \sin\left(-\arccos\frac{3}{5}\right)\cos 3x = \sin\left(3x - \arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} \iff$

$$\iff \begin{cases} 3x - \arccos\dfrac{3}{5} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \text{eller} \\ 3x - \arccos\dfrac{3}{5} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} \end{cases}$$ där n är heltal.

$$\text{Svar: } x = \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} \end{cases}$$ där n är heltal.

7. För $x \neq 0$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$ är $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-k^2 x} = e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + \cdots + e^{-n^2 x} \leq$

$$\leq e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + \cdots + e^{-n^2 x} = \sum_{k=1}^{n^2} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n^2} \left(e^{-x}\right)^k =$$

$=$ / geometrisk summa med första term$= e^{-x}$, kvot$= e^{-x} \neq 1$ och med n^2 termer / $=$

$$= e^{-x} \cdot \frac{1 - \left(e^{-x}\right)^{n^2}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - e^{-n^2 x}}{e^x - 1}, \text{ dvs } \sum_{k=1}^{n} e^{-k^2 x} \leq \frac{1 - e^{-n^2 x}}{e^x - 1}, \text{ vsv.}$$