Linköpings universitet
Matematiska institutionen

**Kurskod: TATA83**
**Provkod: TEN1**

# Tentamen i TATA83 Flervariabelanalys
# 2021-03-22 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Fullständiga motiveringar krävs. Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (a) Bestäm lösningen $f(x,y)$ till den partiella differentialekvationen
$$3xf'_x - yf'_y = 24x$$
med bivillkoret $f(x,2) = 0$, genom att byta till variablerna $u = xy^3$ och $v = x$. (2p)

   (b) Visa att det inte finns någon funktion $f(x,y)$ sådan att $\begin{cases} f'_x(x,y) = xy \\ f'_y(x,y) = x^2 \end{cases}$ (1p)

2. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen
$$f(x,y) = x^2y + y^2 - 2xy$$

3. (a) Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y,z) = yz^2e^x$ i punkten $(0,3,1)$ i den riktning som ges av vektorn $(1,2,-2)$. (1p)

   (b) Bestäm funktionalmatrisen $\bar{f}'(\bar{w}) = \dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)}$ av $\bar{f} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $\bar{f}(\bar{w}) = \begin{pmatrix} f_1(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \\ f_2(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. (1p)

   (c) Låt $f(x,y) = x^2y$. Beräkna $f'_x(1,2)$ genom att använda *definitionen* av partiell derivata. (1p)

4. Bestäm de punkter på kurvan $xy + y^2 - \dfrac{4}{x} = 1$ i vilka $\bar{T} = (2,-1)$ är en tangentvektor. Ange på parameterfri form ekvationerna för normallinjerna till kurvan i dessa punkter.

5. Beräkna trippelintegralen $\displaystyle\iiint_D (z + \sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz$ ,

   där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x \le 0,\ y \ge 0, z \le 0\}$.

6. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av $f(x,y,z) = x - 3y + 2z$ då $(x-1)^2 + y^2 + 2z^2 \le 12$.

7. Betrakta dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x\sqrt{y}}$ där $D$ är den *begränsade* mängd som avgränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$. Varför är integralen generaliserad? Beräkna integralen eller visa att den är divergent.

# Lösningsskisser TATA83/764G03 Flervariabelanalys 2021-03-22

1. a) Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = y^3 f'_u + f'_v$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 3xy^2 f'_u$. Detta ger $3xf'_x - yf'_y = 24x \Leftrightarrow 3x(y^3 f'_u + f'_v) - y \cdot 3xy^2 f'_u = 3xf'_v = 24x\ (\forall x, y) \Leftrightarrow f'_v = 8 \Leftrightarrow f = 8v + g(u)$, $g$ godtycklig. Alltså blir $f(x,y) = 8x + g(xy^3)$. Bivillkoret $f(x,2) = 0$ ger $8x + g(8x) = 0 \Rightarrow [t = 8x] \Rightarrow g(t) = -t \Rightarrow [t = xy^3] \Rightarrow g(xy^3) = -xy^3 \;\Rightarrow$

$$\textit{Svar}: f(x,y) = 8x - xy^3.$$

b) $\begin{cases} f'_x(x,y) = xy = p(x,y) \\ f'_y(x,y) = x^2 = q(x,y) \end{cases}$ lösbart $\Leftrightarrow p'_y = q'_x$. Här är $p'_y = x \neq 2x = q'_x \Rightarrow$ lösning saknas.

Alternativt: $f'_x(x,y) = xy \Rightarrow f(x,y) = x^2y/2 + g(y) \Rightarrow f'_y(x,y) = x^2/2 + g'(y)$, jämför med kravet $f'_y(x,y) = x^2 \Rightarrow g'(y) = x^2/2$, men $g'(y)$ kan inte bero på $x$ så lösning saknas.

2. Stationära punkter fås av $f'_x = 2xy - 2y = 2y(x-1) = 0$ (1), $f'_y = x^2 + 2y - 2x = 0$ (2). (1) $\Rightarrow\ y = 0$ eller $x = 1$. $y = 0$ i (2) $\Rightarrow\ x^2 - 2x = 0\ \Rightarrow x = 0$ eller $x = 2$, och $x = 1$ i (2) $\Rightarrow\ y = \frac{1}{2}$. Alltså är $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1, \frac{1}{2})$ stationära punkter.

$f''_{xx} = 2y$, $f''_{xy} = 2x - 2$, $f''_{yy} = 2$ ger i $(0,0)$ Hessianen $(Hf)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = 1 + \sqrt{5} > 0$ och $\lambda_2 = 1 - \sqrt{5} < 0$, alltså sadelpunkt. Alternativt fås $Q(h,k) = -4hk + 2k^2 = 2(k-h)^2 - 2h^2$, tecken $+$ och $-$, alltså indefinit och punkten en sadelpunkt.

I $(2,0)$ fås $(Hf)(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ också med egenvärden $\lambda_1 = 1 + \sqrt{5} > 0$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{5} < 0$, alltså sadelpunkt. Alternativt fås $Q(h,k) = 4hk + 2k^2 = 2(k+h)^2 - 2h^2$, tecken $+$ och $-$, alltså indefinit och punkten en sadelpunkt.

I $(1, \frac{1}{2})$ fås $(Hf)(1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = 1 > 0$ och $\lambda_2 = 2 > 0$, alltså lokalt minimum. Alternativt fås $Q(h,k) = h^2 + 2k^2$, tecken $+\ +\ \Rightarrow$ positivt definit $\Rightarrow$ lokalt min

$$\textit{Svar}: (1, \tfrac{1}{2}) \text{ är ett lokalt min och } (0,0) \text{ och } (2,0) \text{ sadelpunkter}$$

3. a) $|(1,2,-2)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3\ \Rightarrow\ \bar{v} = \frac{1}{3}(1,2,-2)$ har längd 1. $\nabla f(x,y,z) = (yz^2e^x, z^2e^x, 2yze^x)\ \Rightarrow\ \nabla f(0,3,1) = (3,1,6)\ \Rightarrow f'_{\bar{v}}(0,3,1) = \nabla f(0,3,1) \cdot \bar{v} = (3,1,6) \cdot \frac{1}{3}(1,2,-2) = \frac{1}{3}(3 + 2 - 12) = -\frac{7}{3}$

b) $\bar{f}(\bar{w}) = \begin{pmatrix} f_1(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \\ f_2(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w_1 + 2w_2 + 7w_3 \\ 3w_4 + 2w_5 + 7w_6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\bar{f}'(\bar{w}) = \begin{pmatrix} (f_1)'_{w_1} & (f_1)'_{w_2} & (f_1)'_{w_3} & (f_1)'_{w_4} & (f_1)'_{w_5} & (f_1)'_{w_6} \\ (f_2)'_{w_1} & (f_2)'_{w_2} & (f_2)'_{w_3} & (f_2)'_{w_4} & (f_2)'_{w_5} & (f_2)'_{w_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

c) $f'_x(1,2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 \cdot 2 - 1^2 \cdot 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 + 4h}{h} =$
$= \lim\limits_{h\to 0}(2h + 4) = 4$

4. Normalvektor till nivåkurvan $f(x,y) = xy + y^2 - \frac{4}{x} = 1$ är $\nabla f(x,y) = (y + \frac{4}{x^2}, x + 2y)$. Sök punkter på kurvan där $\bar{T}(t) \cdot \nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow (2,-1) \cdot (y + \frac{4}{x^2}, x + 2y) = 0 \Rightarrow 2(y + \frac{4}{x^2}) - (x + 2y) = \frac{8}{x^2} - x = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$, vilket insatt i $xy + y^2 - \frac{4}{x} = 1$ ger $y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ eller $y = -3 \Rightarrow$ i punkterna $(2,1)$ och $(2,-3)$ på kurvan är $\bar{T}(t) = (2,-1)$ en tangentvektor. Normallinjerna i dessa punkter ges av $(2,-1) \cdot (x - 2, y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 3$ resp. $(2,-1) \cdot (x-2, y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 7$.

*Svar*: Punkterna är $(2,1)$ och $(2,-3)$ och normallinjerna $2x - y = 3$ resp. $2x - y = 7$

5. Mängden $D: \; x^2+y^2+z^2 \le 2\,,\, x\le 0,\, y\ge 0, z\le 0$ blir i rymdpolära koordinater $E: 0\le r\le \sqrt{2},\, \pi/2\le\theta\le\pi,\, \pi/2\le\varphi\le\pi$. Med $z=r\cos\theta,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$ och $|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)}| = r^2\sin\theta$ fås

$$\iiint\limits_D (z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz \;=\; \iiint\limits_E (r\cos\theta+r)\,r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \;=$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)drd\theta d\varphi \;=\; [\frac{r^4}{4}]_0^{\sqrt{2}}\; [\frac{\sin^2\theta}{2}-\cos\theta]_{\pi/2}^{\pi}\,[\varphi]_{\pi/2}^{\pi} =$$

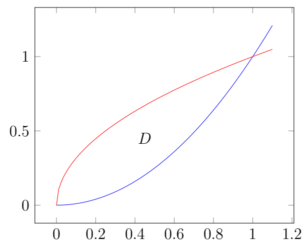
$$= \frac{4}{4}\cdot(\frac{0}{2}+1-\frac{1}{2}+0)\cdot(\pi-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

*Svar* : $\frac{\pi}{4}$

6. Största och minsta värde av $f(x,y,z)=x-3y+2z$ existerar eftersom funktionen är kontinuerlig och mängden $(x-1)^2+y^2+2z^2\le 12$ är en sluten fylld ellipsoid (alltså kompakt). Vi ska undersöka: (1) inre punkter, (2) randen $g(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+2z^2=12$. Sök stationära inre punkter, $\nabla f(x,y,z)=(f'_x,f'_y,f'_z)=(1,-3,2)\ne(0,0,0)$, inga stationära punkter. På randen (2) söker vi punkter där $\nabla f(x,y,z)$ och $\nabla g(x,y,z)=(2(x-1),2y,4z)$ är parallella. $\nabla f\times\nabla g=\bar{0}$ ger $(-12z-4y,4x-4-4z,2y+6x-6)=(0,0,0)$. $-12z-4y=0\Rightarrow y=-3z$ och $4x-4-4z=0\Rightarrow x=z+1$ (vilket ger att $2y+6x-6=-6z+6z+6-6=0$ också är uppfylld). Insatt i $g(x,y,z)=12$ fås $(z+1-1)^2+(-3z)^2+2z^2=12\Rightarrow\ z^2=1\ \Rightarrow\ z=\pm1\Rightarrow(x,y,z)=(2,-3,1)$ och $(x,y,z)=(0,3,-1)$ är enda kandidater. [Alternativt: $\nabla g=k\nabla f\Rightarrow 2(x-1)=k,\ 2y=-3k,\ 4z=2k\Rightarrow x=1+k/2,\ y=-3k/2,\ z=k/2$ som insatt i $g=12$ ger $k^2=4\Rightarrow k=\pm2$ som ger samma punkter som ovan.] $f(2,-3,1)=13,\ f(0,3,-1)=-11\ \Rightarrow$

*Svar*: Minsta värde är $f(0,3,-1)=-11$, största $f(2,-3,1)=13$

7. Området $D$ kan skrivas $x^2\le\ y\ \le\sqrt{x},\ 0\le x\le1$, se figur med $y=x^2$ och $y=\sqrt{x}$ ritade. Funktionen $f(x,y)=\frac{1}{x\sqrt{y}}$ blir obegränsad vid $(x,y)=(0,0)$ i nedre vänstra hörnet av $D$, därför är integralen generaliserad.




Eftersom $f(x,y)>0$ i $D$ kan vi räkna på med upprepade enkelintegraler.

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x\sqrt{y}} = \int_0^1(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\frac{dy}{\sqrt{y}})\frac{dx}{x} = \int_0^1[2\sqrt{y}]_{x^2}^{\sqrt{x}}\frac{dx}{x} = 2\int_0^1(x^{-3/4}-1)\,dx = 2[4x^{1/4}-x]_0^1 = 6$$

Integralen är alltså konvergent. *Svar* : 6

[Notera att $\int_0^1 x^{-3/4}\,dx$ är generaliserad men $\lim_{a\to0^+}\int_a^1 x^{-3/4}\,dx = \lim_{a\to0^+}[4x^{1/4}]_a^1 = \lim_{a\to0^+}(4-4a^{1/4})=4-0=4$, får skrivas som ovan $\int_0^1 x^{-3/4}\,dx=[4x^{1/4}]_0^1=4-0=4$]