Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA83
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA83 Flervariabelanalys
2021-06-10 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Fullständiga motiveringar krävs. Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin x}{x^2+y^2}$ eller visa att det inte existerar. (2p)

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty} z^4 e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ eller visa att det inte existerar. (1p)

2. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 3y$$

   på eller innanför triangeln med hörn i $(-4,0)$, $(2,0)$ och $(2,6)$.

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \left(\sqrt{x^2+3y^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}\right) dxdy$$

   där $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+3y^2 \le 3\}$.

4. (a) Bestäm en tangentvektor till kurvan $(x(t),y(t),z(t)) = (2t^2-2t-3, \frac{t^3}{4}, 6t-11)$ $(t\in\mathbb{R})$ i punkten $(x,y,z)=(1,2,1)$ på kurvan. (1p)

   (b) Bestäm på formen $Ax+By+Cz=D$ tangentplanet till nivåytan $xy^2z + 2x^2yz^2 = 8$ i punkten $(x,y,z)=(1,2,1)$ på ytan. (1p)

   (c) Visa att i punkten $(x,y,z)=(1,2,1)$ skär kurvan i (a) ytan i (b) ortogonalt. (1p)

5. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen

$$f(x,y,z) = z^3 + x^2 + y^2 + z^2 - 4yz + 2x$$

6. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D e^{x-y+z}\, dxdydz$$

   där $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0\}$.

7. Bestäm lösningen $f(x,y)$ till den partiella differentialekvationen

$$f''_{xx} - 4xf''_{xy} + 4x^2 f''_{yy} - 2f'_y = 2$$

   med bivillkoren $f(0,y)=0$ och $f'_x(0,y)=e^y$, genom att byta till variablerna $u=x^2+y$ och $v=x$.

Lösningsskisser TATA83/764G03 Flervariabelanalys 2021-06-10

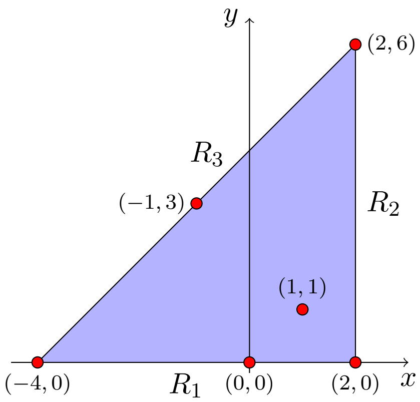
1. (a) Med $f(x,y) = \frac{y\sin x}{x^2+y^2}$ fås längs x-axeln $f(x,y) = f(x,0) = \frac{0\sin x}{x^2+0^2} = 0 \to 0$ då $x \to 0$, och längs linjen $y = x$ fås $f(x,y) = f(x,x) = \frac{x\sin x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x} \to \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ då $x \to 0$. Olika värden längs olika riktningar $\Rightarrow$ *Svar* : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\sin x}{x^2+y^2}$ existerar ej

(b) Rymdpolära koordinater (med $z = r\cos\theta$ och $x^2+y^2+z^2 = r^2$) ger

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty} z^4 e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{r\to\infty} r^4\cos^4\theta\, e^{-r} = 0$$

eftersom $r^4 e^{-r} \to 0$ då $r \to \infty$ och $\cos^4\theta$ är begränsad *Svar* : $\lim_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty} z^4 e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$

2. Största och minsta värde av $f(x,y) = x^3 - 3xy + 3y$ existerar eftersom funktionen är kontinuerlig och mängden är kompakt. Vi ska undersöka: (1) inre punkter, (2a) sträckan R_1 på x-axeln: $-4 < x < 2$, $y = 0$, (2b) sträckan R_2: $0 < y < 6$, $x = 2$, (2c) sträckan R_3: $y = x+4$, $-4 < x < 2$, och (2d) hörnen $(-4,0)$, $(2,0)$, $(2,6)$. Sök stationära inre punkter, $\nabla f(x,y) = (f'_x, f'_y) = (3x^2-3y, -3x+3) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (1,1)$ som tillhör mängden och $\underline{f(1,1) = 1}$ är en kandidat. På randdelen R_1 är $f(x,y) = f(x,0) = x^3 = g_1(x)$, $g_1'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (på R_1) $\Rightarrow (x,y) = (0,0) \Rightarrow \underline{f(0,0) = 0}$ är en kandidat. På R_2 är $f(x,y) = f(2,y) = 8 - 6y + 3y = 8 - 3y = g_2(y)$, $g_2'(y) = -3 \neq 0 \Rightarrow$ inga kandidater på R_2. På R_3 är $y = x+4 \Rightarrow f(x,y) = f(x,x+4) = x^3 - 3x(x+4) + 3(x+4) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12 = g_3(x)$, $g_3'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ (utanför R_3) eller $x = -1$ (på R_3) $\Rightarrow (x,y) = (-1,3) \Rightarrow \underline{f(-1,3) = 17}$ är en kandidat. I hörnen fås kandidaterna $\underline{f(-4,0) = -64}$, $\underline{f(2,0) = 8}$ och $\underline{f(2,6) = -10}$.



Jämförelse av 6 kandidater $\Rightarrow$

Svar: Minsta värde är $f(-4,0) = -64$,
största värde är $f(-1,3) = 17$

3. Variabelbytet $u = x, v = \sqrt{3}y$ ger området $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u^2+v^2 \le 3\}$ (området mellan två cirklar med radier 1 och $\sqrt{3}$) och funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Därefter byte från (u,v) till polära koordinater (ρ,φ), $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, ger gränser $1 \le \rho \le \sqrt{3}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ och determinant ρ.

Alltså $\displaystyle\iint_D \Big(\sqrt{x^2+3y^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}\Big)\,dxdy = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_E \Big(\sqrt{u^2+v^2} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\Big)\,dudv =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{3}} (\rho - \frac{1}{\rho})\,\rho\,d\rho d\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} [\frac{\rho^3}{3} - \rho]_1^{\sqrt{3}}\,d\varphi = \frac{2}{3\sqrt{3}}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \qquad \textit{Svar}: \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

4. (a) Punkten $(1,2,1)$ på kurvan svarar mot parametervärde $t = 2$. Tangentvektor i godtycklig punkt på kurvan är $\bar{T}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (4t-2, 3t^2/4, 6) \Rightarrow$ tangentvektor i $(1,2,1)$ är (vektorer parallella med) $\bar{T}(2) = (6,3,6)$ *Svar* : $(6,3,6)$

(b) Med $f(x,y,z) = xy^2z + 2x^2yz^2$ är $\bar{N} = \nabla f(1,2,1)$ normalvektor till ytan $f(x,y,z) = 8$ i punkten $(1,2,1)$ (eftersom $f(1,2,1) = 8$). $\nabla f(x,y,z) = (f'_x\,, f'_y\,, f'_z) = (y^2z + 4xyz^2,$ $2xyz + 2x^2z^2, xy^2 + 4x^2yz) \Rightarrow \bar{N} = (12,6,12) \Rightarrow$ tangentplanet ges av $\bar{N} \bullet (x-1, y-2, z-1)$ $= 0 \Leftrightarrow 12(x-1) + 6(y-2) + 12(z-1) = 0 \Leftrightarrow 12x + 6y + 12z = 36 \Leftrightarrow 2x + y + 2z = 6$.

Svar : $2x + y + 2z = 6$

(c) Kurvan i (a) skär ytan i (b) ortogonalt i punkten $(2,1,2)$ eftersom tangentvektorn $(6,3,6)$ till kurvan är parallell med normalen $(12,6,12)$ till ytan: $2 \cdot (6,3,6) = (12,6,12)$.

5. Stationära punkter fås av $f'_x = 2x + 2 = 0$ (1), $f'_y = 2y - 4z = 0$ (2), $f'_z = 3z^2 + 2z - 4y = 0$ (3). (1) $\Rightarrow x = -1$. (2) $\Rightarrow y = 2z$, (2) i (3) $\Rightarrow 3z^2 - 6z = 0 \Rightarrow z = 0$ som i (2) ger $y = 0$, eller $z = 2$ som i (2) ger $y = 4$. Alltså är $(-1,0,0)$ och $(-1,4,2)$ stationära punkter. $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{zz} = 6z + 2$, $f''_{xy} = f''_{xz} = 0$ och $f''_{yz} = -4$ ger Hessianen $(Hf)(-1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = 6 > 0$, $\lambda_2 = 2 > 0$ och $\lambda_3 = -2 < 0$, $+\,,+\,,-$ ger att $(-1,0,0)$ är en sadelpunkt.
Alternativt fås $Q(h,k,\ell) = 2h^2 + 2k^2 + 2\ell^2 - 8k\ell = 2h^2 + 2(k - 2\ell)^2 - 6\ell^2$, tecken $+\,,+\,,-$ ger Q indefinit, alltså är $(-1,0,0)$ en sadelpunkt.
I $(-1,4,2)$ fås $(Hf)(-1,4,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 14 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_{2,3} = 8 \pm \sqrt{52} > 0$, tecken $+\,,+\,,+$ ger att $(-1,4,2)$ är ett lokalt min.
Alternativt fås $Q(h,k,\ell) = 2h^2 + 2k^2 + 14\ell^2 - 8k\ell = 2h^2 + 2(k - 2\ell)^2 + 6\ell^2$, tecken $+\,,+\,,+$ ger Q positivt definit, alltså är $(-1,4,2)$ ett lokalt min.

Svar : Lokalt min i $(-1,4,2)$, sadelpunkt i $(-1,0,0)$

6. Mängden D kan skrivas $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$, $0 \le z \le 1 - x - y$. Man får

$$\iiint_D e^{x-y+z}\,dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} e^{x-y+z}\,dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} [e^{x-y+z}]_{z=0}^{1-x-y}\,dydx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (e^{1-2y} - e^{x-y})\,dydx = \int_0^1 [\text{-}\tfrac{1}{2}e^{1-2y} + e^{x-y}]_{y=0}^{1-x}\,dx = \int_0^1 (\text{-}\tfrac{1}{2}e^{2x-1} + e^{2x-1} + \tfrac{1}{2}e - e^x)dx =$$

$$= [\tfrac{1}{4}e^{2x-1} + \tfrac{1}{2}ex - e^x]_0^1 = \frac{e}{4} + \frac{e}{2} - e - \frac{e^{-1}}{4} - 0 + 1 = 1 - \tfrac{1}{4}(e + e^{-1}) \quad \textit{Svar}: 1 - \tfrac{1}{4}(e + e^{-1})$$

7. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2xf'_u + f'_v$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u$. Använd $(\ )'_x = 2x(\ )'_u + (\ )'_v$ och $(\ )'_y = (\ )'_u \Rightarrow f''_{xx} = (2xf'_u + f'_v)'_x = 2f'_u + 2x(f'_u)'_x + (f'_v)'_x =$ $2f'_u + 2x(2x(f'_u)'_u + (f'_u)'_v) + 2x(f'_v)'_u + (f'_v)'_v = 2f'_u + 4x^2 f''_{uu} + 2xf''_{uv} + 2xf''_{uv} + f''_{vv}$, $f''_{xy} = (2xf'_u + f'_v)'_y = 2x(f'_u)'_y + (f'_v)'_y = 2x(f'_u)'_u + (f'_v)'_u = 2xf''_{uu} + f''_{uv}$, $f''_{yy} = f''_{uu}$.
Insatt i ekvationen fås $f''_{xx} - 4xf''_{xy} + 4x^2 f''_{yy} - 2f'_y = 2 \Leftrightarrow 2f'_u + 4x^2 f''_{uu} + 4xf''_{uv} + f''_{vv} - 4x(2xf''_{uu} + f''_{uv}) + 4x^2 f''_{uu} - 2f'_u = 2 \Leftrightarrow f''_{vv} = 2 \Leftrightarrow f'_v = 2v + g(u) \Leftrightarrow f = v^2 + vg(u) + h(u)$.
g och h godtyckliga envariabelfunktioner. Alltså är $f(x,y) = x^2 + xg(x^2 + y) + h(x^2 + y)$.
Bivillkoret $f(0,y) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + h(y) = 0 \Rightarrow h(y) = 0 \Rightarrow f(x,y) = x^2 + xg(x^2 + y)$ $\Rightarrow f'_x(x,y) = 2x + 1 \cdot g(x^2 + y) + x \cdot 2xg'(x^2 + y)$. Bivillkoret $f'_x(0,y) = e^y$ ger då $0 + g(y) + 0 = e^y \Rightarrow g(y) = e^y \Rightarrow g(x^2 + y) = e^{x^2+y} \Rightarrow f(x,y) = x^2 + xe^{x^2+y}$

Svar : $f(x,y) = x^2 + xe^{x^2+y}$