Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA83
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA83 Flervariabelanalys
2021-08-19 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Fullständiga motiveringar krävs. Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (a) Bestäm alla C^3-funktioner $f(x,y)$ sådana att $f'''_{xxy}(x,y) = xy$. (1p)

   (b) Bestäm alla C^1-funktioner $f(x,y)$ sådana att $\begin{cases} f'_x(x,y) = y\cos x + xy^2 + 1 \\ f'_y(x,y) = \sin x + x^2 y - 1 \end{cases}$ (1p)

   (c) I vilken riktning växer $f(x,y,z) = xyz + 2xy + 3z$ snabbast i punkten $(3,2,-1)$? (1p)

2. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{4}{x} - 4y$$

3. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av olikheterna $0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$, $2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ och $0 \le y \le \sqrt{3}\,x$.

4. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen

$$f(x,y,z) = 2x + 2y + z$$

   i halvklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $y \ge 0$.

5. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \cos(x+y)\cos(2x-y)\,dxdy$$

   där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},\pi)$ och $(\pi,\frac{\pi}{2})$.

6. Bestäm konstanten C så att ytan $4x^2+y^2+4z^2 = C$ har planet $2x+y+z=9$ som ett tangentplan.

7. Bestäm funktionalmatrisen $(\bar{f}\circ\bar{g})'(\bar{x})$ för funktionen $(\bar{f}\circ\bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$ i punkten $\bar{x} = (x_1,x_2) = (1,2)$ då $\bar{g}(\bar{x}) = (g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)) = (-x_1+x_2, 2x_1-x_2)$ och $\bar{f}(\bar{u}) = (f_1(u_1,u_2), f_2(u_1,u_2)) = (\arctan u_1\,, \arctan u_2)$.

Lösningsskisser TATA83/764G03 Flervariabelanalys 2021-08-19

1. (a) $f'''_{xxy} = xy \Rightarrow f''_{xx} = \frac{1}{2}xy^2 + g_1(x) \Rightarrow f'_x = \frac{1}{4}x^2y^2 + G_1(x) + g_2(y) \Rightarrow f = \frac{1}{12}x^3y^2 + h(x) + xg_2(y) + g_3(y)$, där $h' = G_1$ och $G_1' = g_1$.

Svar : $f(x,y) = \frac{1}{12}x^3y^2 + h(x) + xg_1(y) + g_2(y)$, h, g_1, g_2 godt. funktioner

(b) $f'_x(x,y) = y\cos x + xy^2 + 1 \Rightarrow f(x,y) = y\sin x + \frac{1}{2}x^2y^2 + x + g(y) \Rightarrow f'_y(x,y) = \sin x + x^2y + g'(y)$. Jämför med $f'_y(x,y) = \sin x + x^2y - 1 \Rightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y + C \Rightarrow$

Svar : $f(x,y) = y\sin x + \frac{1}{2}x^2y^2 + x - y + C$, C godtycklig konstant.

(c) f växer snabbast i gradientens riktning. $\nabla f(x,y,z) = (yz + 2y, xz + 2x, xy + 3) \Rightarrow \nabla f(3,2,-1) = (2,3,9)$.

Svar : I riktning $(2,3,9)$

2. Stationära punkter fås av $f'_x = 1/y^2 - 4/x^2 = 0$, $f'_y = -2x/y^3 - 4 = 0$. $f'_x = 0 \Rightarrow x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = \pm 2y$. $x = 2y$ insatt i $f'_y = 0$ ger $-4/y^2 - 4 = 0$ som saknar lösning, $x = -2y$ i $f'_y = 0$ ger $4/y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow$ stationära punkter är $(2,-1)$ och $(-2,1)$. $f''_{xx} = 8/x^3$, $f''_{xy} = -2/y^3$ och $f''_{yy} = 6x/y^4$ ger för punkten $(2,-1)$ Hessianen $(Hf)(2,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_{1,2} = (13 \pm \sqrt{137})/2 > 0$, alltså lokalt min. Alternativt fås $Q(h,k) = h^2 + 4hk + 12k^2 = (h+2k)^2 + 8k^2$, tecken $+\,,+$ ger Q positivt definit, alltså är punkten lokalt min. För punkten $(-2,1)$ fås $(Hf)(-2,1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$ med egenvärden $-(13 \pm \sqrt{137})/2 < 0$, alltså lokalt max. Alternativt fås $Q(h,k) = -h^2 - 4hk - 12k^2 = -(h+2k)^2 - 8k^2$, tecken $-\,,-$ ger Q negativt definit, alltså är punkten lokalt max.

Svar : $(2,-1)$ är ett lokalt min och $(-2,1)$ är ett lokalt max (inga sadelpunkter)

3. Mängden $D: 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$, $2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, $0 \le y \le \sqrt{3}x$ blir i rymdpolära koordinater $E: \sqrt{2} \le r \le 2$, $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi \le \pi/3$. Volymen blir

$$V = \iiint_D 1\,dxdydz = \iiint_E r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi = \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{\sqrt{2}}^{2} \Big[-\cos\theta\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \Big[\varphi\Big]_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{8-2\sqrt{2}}{3} \cdot \Big(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \cdot \Big(\frac{\pi}{3} - 0\Big) = \frac{(4\sqrt{2}-2)\pi}{9}$$

Svar : $\dfrac{(4\sqrt{2}-2)\pi}{9}$

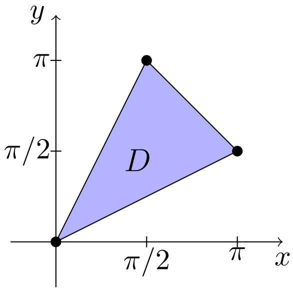
4. Största och minsta värde av $f(x,y,z) = 2x + 2y + z$ i halvklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $y \ge 0$ existerar eftersom funktionen är kontinuerlig och halvklotet är kompakt. Sätt $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ och $h(x,y,z) = y$.

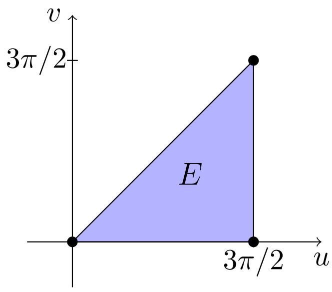
Undersök: (1) inre punkter, (2a) halvsfären $g = 1$, $h > 0$, (2b) cirkelskivan $g < 1$, $h = 0$ i xz-planet, (2c) cirkeln $g = 1$, $h = 0$.

(1) $\nabla f(x,y,z) = (2,2,1) \neq \bar{0} \Rightarrow$ inga stationära punkter. (2a) $\nabla f(x,y,z)$ och $\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z)$ parallella, $(2x,2y,2z) = k(2,2,1) \Rightarrow x = k, y = k, z = k/2$, insatt i $g = 1$ fås $9k^2/4 = 1 \Rightarrow k = \pm 2/3 \Rightarrow (x,y,z) = \pm(2/3,2/3,1/3)$ så $h = y > 0 \Rightarrow \underline{f(2/3,2/3,1/3) = 3}$ är kandidat. (2b) $\nabla f(x,y,z) = (2,2,1)$ och $\nabla h(x,y,z) = (0,1,0)$ parallella gäller aldrig, inga kandidater här. (2c) $\nabla f(x,y,z) = (2,2,1)$, $\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z)$ och $\nabla h(x,y,z) = (0,1,0)$ är linjärt beroende. Insatta som kolonner eller rader i en 3×3 - determinant som sätts $= 0$ ger detta ekvationen $x - 2z = 0$. Kombinerad med $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$ och $h(x,y,z) = y = 0$ fås $5z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1/\sqrt{5} \Rightarrow x = \pm 2/\sqrt{5} \Rightarrow \underline{f(2/\sqrt{5},0,1/\sqrt{5}) = \sqrt{5}}$ och $\underline{f(-2/\sqrt{5},0,-1/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}}$ är kandidater. Jämförelse av de tre kandidaterna $\Rightarrow$

Svar : Största värde är $f(2/3,2/3,1/3) = 3$, minsta $f(-2/\sqrt{5},0,-1/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

5. Inför nya variabler $u = x + y$, $v = 2x - y$. Då avbildas triangelns hörn $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ och $(\pi, \frac{\pi}{2})$ i xy-planet på $(0,0)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ och $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ i uv-planet. D avbildas alltså på en triangel E som beskrivs av $0 \le u \le \frac{3\pi}{2}$, $0 \le v \le u$. Vi har $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$





$$\iint\limits_D \cos(2x+3y)\cos(2x-y)dxdy = \iint\limits_E \cos u \cos v \,\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \int_0^{3\pi/2}\int_0^u \cos u \cos v \,\frac{1}{3}\, dvdu$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{3\pi/2} \cos u [\sin v]_0^u \, du = \frac{1}{3}\int_0^{3\pi/2} \cos u \sin u \, du = \frac{1}{6}[\sin^2 u]_0^{3\pi/2} = \frac{1}{6} \qquad \textit{Svar}: \frac{1}{6}$$

6. Ytan kan skrivas $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 = C$. I punkt (a,b,c) på ytan har tangentplanet normalvektor $\bar{N} = \nabla f(a,b,c) = (8a, 2b, 8c)$. Vi söker punkter där $\bar{N}$ är parallell med $\bar{n} = (2,1,1)$ som är normalvektor till planet $2x + y + z = 9$. $\bar{N} = k\bar{n}$ ger $a = k/4, b = k/2, c = k/8$, insatt i $2a + b + c = 9$ ((a,b,c) ligger också i tangentplanet) fås $9k/8 = 9 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow (a,b,c) = (2,4,1)$. Detta ger $C = 4a^2 + b^2 + 4c^2 = 36$.

$\textit{Svar}: C = 36$

7. Kedjeregeln ger $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{x}))\bar{g}'(\bar{x})$. Partiella deriveringar ger

$$\bar{g}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } \bar{f}'(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+u_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+u_2^2} \end{pmatrix}, \ \bar{x} = (1,2) \Rightarrow \bar{u} = \bar{g}(\bar{x}) = (1,0) \Rightarrow$$

$$(\bar{f} \circ \bar{g})'(1,2) = \bar{f}'(1,0)\bar{g}'(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Svar}: (\bar{f} \circ \bar{g})'(1,2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$