Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA83
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA83 Flervariabelanalys
2022-03-22 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Fullständiga motiveringar krävs. Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2}{(x-1)^2+y^2}$ eller visa att det inte existerar. (2p)

   (b) Bestäm alla lösningar $f(x,y)$ till den partiella differentialekvationen
   $$f'_x + 2xf'_y = 1$$
   genom att byta till variablerna $u = x$ och $v = y - x^2$. (1p)

2. (a) Bestäm funktionalmatrisen $\bar{f}'(\bar{w}) = \dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)}$ av $\bar{f} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $\bar{f}(\bar{w}) = \begin{pmatrix} f_1(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \\ f_2(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_5 \\ w_6 \end{pmatrix}$. (1p)

   (b) Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y,z) = \sin(xy^2z^3)$ i punkten $(\pi, -1, 1)$ i den riktning som ges av vektorn $(2,2,1)$. (1p)

   (c) Bestäm tangentlinjen till kurvan $(x(t), y(t), z(t)) = (2\cos t, t+1, 3\sin t)$ i punkten $(x,y,z) = (2,1,0)$ på kurvan. (1p)

3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen
   $$f(x,y) = \tfrac{1}{3}y^3 + x^2 + y^2 - 2xy - y$$

4. Beräkna dubbelintegralen
   $$\iint_D \frac{x+y}{4x^2+9y^2}\,dxdy$$
   där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq 4x^2 + 9y^2 \leq 9\,,\ y \geq 0\}$.

5. Bestäm de punkter på ytan $xy - xz + 2yz = 8$ i vilka ytans tangentplan är parallellt med xy-planet, samt ange tangentplanens ekvationer i dessa punkter.

6. Beräkna trippelintegralen
   $$\iiint_D \left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{x^3z^2}\right) dxdydz$$
   där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 4,\ x \leq y \leq 3x,\ y \leq z \leq 2y\}$.

7. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av $f(x,y,z) = x + y + z$ på skärningen mellan ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 3$ och planet $x - y + 3z = 4$.

Lösningsskisser TATA83/764G03 Flervariabelanalys 2022-03-22

1. (a) Med $t = x - 1$ fås $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(t,y)\to(0,0)} \frac{(t+1)y^2}{t^2+y^2}$. Längs t-axeln ($y = 0$) fås $\dfrac{1\cdot 0^2}{0^2+y^2} = 0 \to 0$, $t \to 0$. Längs $t = y$ fås $\dfrac{(t+1)t^2}{t^2+t^2} = \dfrac{t+1}{2} \to \dfrac{1}{2}$, $t \to 0$. Olika värden längs olika riktningar $\Rightarrow$ gränsvärdet existerar ej. Alternativt, om t, y ersätts med polära koordinater fås uttrycket $\rho\cos\varphi\sin^2\varphi + \sin^2\varphi$, där första termen går mot 0 då $\rho \to 0$ medan den andra är vinkelberoende, alltså existerar inte gränsvärdet.

Svar : Gränsvärdet existerar ej

(b) Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u - 2xf'_v$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_v$. Detta ger $f'_x + 2xf'_y = 1 \Leftrightarrow f'_u - 2xf'_v + 2xf'_v = 1 \Leftrightarrow f'_u = 1 \Leftrightarrow f = u + g(v) = x + g(y - x^2)$, g godtycklig (C^1-)envariabelfunktion. *Svar* : $f(x, y) = x + g(y - x^2)$

2. (a) $\bar{f}(\bar{w}) = \begin{pmatrix} f_1(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \\ f_2(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4w_1 + 2w_2 + w_5 \\ 4w_3 + 2w_4 + w_6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\bar{f}'(\bar{w}) = \begin{pmatrix} (f_1)'_{w_1} & (f_1)'_{w_2} & (f_1)'_{w_3} & (f_1)'_{w_4} & (f_1)'_{w_5} & (f_1)'_{w_6} \\ (f_2)'_{w_1} & (f_2)'_{w_2} & (f_2)'_{w_3} & (f_2)'_{w_4} & (f_2)'_{w_5} & (f_2)'_{w_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $|(2, 2, 1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ har längd 1. $\nabla f(x, y, z) = (y^2z^3\cos(xy^2z^3), 2xyz^3\cos(xy^2z^3), 3xy^2z^2\cos(xy^2z^3)) \Rightarrow \nabla f(\pi, -1, 1) = (-1, 2\pi, -3\pi)$ $\Rightarrow f'_{\bar{v}}(\pi, -1, 1) = \nabla f(\pi, -1, 1) \cdot \bar{v} = (-1, 2\pi, -3\pi) \cdot \frac{1}{3}(2, 2, 1) = \frac{1}{3}(-2 + 4\pi - 3\pi) = \dfrac{\pi - 2}{3}$

(c) Tangentvektorer fås av $\bar{T}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-2\sin t, 1, 3\cos t)$. Punkten $(2, 1, 0)$ svarar mot $t = 0$ (y-koordinaten ger $t = 0$, kontroll av x- och z-koordinater ger sedan att $t = 0$ stämmer) och $\bar{T}(0) = (0, 1, 3)$. Tangentlinjen ges alltså av $(x, y, z) = (2, 1, 0) + s(0, 1, 3)$, $s \in \mathbb{R}$ (s parameter).

3. Stationära punkter fås av $f'_x = 2x - 2y = 0$, $f'_y = y^2 + 2y - 2x - 1 = 0$. $f'_x = 0 \Rightarrow x = y$, insatt i $f'_y = 0$ fås $y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Stationära punkter blir $(1, 1)$ och $(-1, -1)$. $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -2$ och $f''_{yy} = 2y + 2$ ger för punkten $(1, 1)$ Hessianen $(Hf)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5} > 0$, alltså lokalt min. Alternativt fås $Q(h, k) = 2h^2 - 4hk + 4k^2 = 2(h - k)^2 + 2k^2$, tecken $+\,,+$ ger Q positivt definit, alltså är punkten lokalt min. För punkten $(-1, -1)$ fås $(Hf)(-1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$, så $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 < 0$, alltså sadelpunkt. Alternativt fås $Q(h, k) = 2h^2 - 4hk + 0{\cdot}k^2 = 2(h - k)^2 - 2k^2$, tecken $+\,,-$ ger Q indefinit, alltså är punkten en sadelpunkt.

Svar : $(1, 1)$ är ett lokalt min och $(-1, -1)$ är en sadelpunkt

4. Variabelbytet $u = 2x, v = 3y$ ger området $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le u^2 + v^2 \le 9\, ,\ v \ge 0\}$ (övre halvan av området mellan två cirklar med radier 2 och 3) och funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{6}$. Därefter byte från (u, v) till polära koordinater (ρ, φ), $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, ger gränser $2 \le \rho \le 3$, $0 \le \varphi \le \pi$ och determinant ρ. Alltså

$$\iint_D \frac{x + y}{4x^2 + 9y^2}\, dxdy = \frac{1}{6}\iint_E \frac{u/2 + v/3}{u^2 + v^2}\, dudv = \frac{1}{6}\int_0^\pi \int_2^3 \frac{(\rho\cos\varphi)/2 + (\rho\sin\varphi)/3}{\rho^2}\, \rho\, d\rho d\varphi =$$

$$\int_0^\pi \int_2^3 \left(\frac{\cos\varphi}{12} + \frac{\sin\varphi}{18}\right) d\rho d\varphi = [\rho]_2^3 \cdot \left[\frac{\sin\varphi}{12} - \frac{\cos\varphi}{18}\right]_0^\pi = (3 - 2)\cdot\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{9} \qquad \textit{Svar}: \frac{1}{9}$$

5. Ytan kan skrivas $f(x,y,z) = xy - xz + 2yz = 8$. I punkt (a,b,c) på ytan har tangentplanet normalvektor $\bar{N} = \nabla f(a,b,c) = (b-c, a+2c, -a+2b)$. Vi söker punkter där $\bar{N}$ är parallell med $\bar{n} = (0,0,1)$ som är normalvektor till xy-planet. Då måste $b - c = 0$ och $a + 2c = 0$. Sätt in $b = c$ och $a = -2c$ i $f(a,b,c) = 8 \Rightarrow -2c^2 + 2c^2 + 2c^2 = 8 \Rightarrow c = \pm 2 \Rightarrow (a,b,c) = \pm(-4,2,2)$. Tangentplanen i dessa punkter blir $z = \text{konstant} = c = \pm 2$.

Svar : I punkten $(-4,2,2)$ är tangentplanet $z = 2$ och i $(4,-2,-2)$ är det $z = -2$

6. Mängden D är $1 \le x \le 4$, $x \le y \le 3x$, $y \le z \le 2y$. Upprepade enkelintegraler ger

$$\iiint_D \left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{x^3 z^2}\right) dxdydz = \int_1^4 \int_x^{3x} \int_y^{2y} \left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{x^3 z^2}\right) dzdydx = \int_1^4 \int_x^{3x} \left[\frac{x^2 z}{y^3} - \frac{y}{x^3 z}\right]_{z=y}^{2y} dydx =$$

$$= \int_1^4 \int_x^{3x} \left(\frac{2x^2}{y^2} - \frac{1}{2x^3} - \frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{x^3}\right) dydx = \int_1^4 \int_x^{3x} \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{2x^3}\right) dydx = \int_1^4 \left[-\frac{x^2}{y} + \frac{y}{2x^3}\right]_{y=x}^{3x} dx =$$

$$= \int_1^4 \left(-\frac{x}{3} + \frac{3}{2x^2} + x - \frac{1}{2x^2}\right) dx = \int_1^4 \left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{1}{x}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 =$$

$$= 6 - \frac{1}{4} = \frac{23}{4}$$

Svar : $\frac{23}{4}$

7. Mängden är skärningen mellan en ellipsoid och ett plan och är därför kompakt. Största och minsta värde existerar eftersom funktionen är kontinuerlig på mängden. Sätt $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2$ och $h(x,y,z) = x - y + 3z$. Största och minsta värde av $f(x,y,z) = x + y + z$ då $g(x,y,z) = 3$ och $h(x,y,z) = 4$ finns i punkter där $\nabla f(x,y,z) = (1,1,1)$, $\nabla g(x,y,z) = (2x, 4y, 4z)$ och $\nabla h(x,y,z) = (1,-1,3)$ är linjärt beroende. Insatta som kolonner eller rader i en 3×3 - determinant som sätts $= 0$ ger detta ekvationen $-8x + 8y + 8z = 0 \Leftrightarrow z = x - y$. Insatt i $h(x,y,z) = x - y + 3z = 4$ fås $4x - 4y = 4 \Rightarrow y = x - 1$ och $z = x - y = x - (x-1) = 1$. Allt insatt i $g = 3$ ger $x^2 + 2(x-1)^2 + 2 \cdot 1^2 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 1/3$ med motsvarande y-värden $y = 0$, $y = -2/3$. Vi får punkterna $(1,0,1)$ och $(1/3, -2/3, 1)$ med $f(1,0,1) = 2$ och $f(1/3, -2/3, 1) = 2/3$ som måste vara största och minsta värde eftersom inga fler punkter hittas.

Svar : Största värde är $f(1,0,1) = 2$, minsta $f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1) = \frac{2}{3}$.