Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA83
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA83 Flervariabelanalys
2022-08-18 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Fullständiga motiveringar krävs. Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (a) Bestäm funktionen $f(x,y)$ så att $\begin{cases} f'_x(x,y) = ye^{x+y} + y^2 - 2 \\ f'_y(x,y) = (1+y)e^{x+y} + 2xy + 2y \end{cases}$ och $f(-1,1) = 7$. (2p)

   (b) Avgör om $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{(x^2+y^2)^{1/4}} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ är kontinuerlig i (0,0). (1p)

2. (a) Bestäm på formen $Ax + By + Cz = D$ tangentplanet till ytan $x = y^2 \ln z$ i punkten där $y = -1$ och $z = e$. (1p)

   (b) Bestäm på formen $Ax + By + Cz = D$ tangentplanet till parameterytan $(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (st\,, s-t\,, t^3\,)$ i punkten där $s = 2$ och $t = 1$. (2p)

3. Visa att punkten $(1,-2,0)$ är en stationär punkt för
$$f(x,y,z) = (x-1)(y+2)\sin z + x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz - 2x + 4y + 2z\,.$$
Avgör om den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt.

4. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$
där D är den obegränsade mängden $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 2\,,\ 0 \leq x \leq y\}$.

5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av $f(x,y,z) = x + y - z$ då $(x+1)^2 + 6y^2 + 3(z-1)^2 = 54$.

6. Beräkna trippelintegralen $\displaystyle\iiint_D \cos z\,dxdydz$, där
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z \leq \pi\,,\ x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0\}.$$

7. Bestäm funktionalmatrisen $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x})$ för funktionen $(\bar{f} \circ \bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$ i punkten $\bar{x} = (x_1, x_2) = (2,1)$ då $\bar{g}(\bar{x}) = (g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)) = (x_1 \ln x_2\,, x_1 + 3x_2)$ och $\bar{f}(\bar{u}) = (f_1(u_1,u_2), f_2(u_1,u_2)) = (u_1^2 + u_2\,, u_2 e^{u_1})$.

Lösningsskisser TATA83/764G03 Flervariabelanalys 2022-08-18

1. (a) $f'_x(x,y) = ye^{x+y} + y^2 - 2 \Rightarrow f(x,y) = ye^{x+y} + xy^2 - 2x + g(y) \Rightarrow f'_y(x,y) = 1 \cdot e^{x+y} + ye^{x+y} + 2xy + g'(y)$. Jämför med $f'_y(x,y) = (1+y)e^{x+y} + 2xy + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + C \Rightarrow f(x,y) = ye^{x+y} + xy^2 - 2x + y^2 + C$. Bivillkoret $f(-1,1) = 7$ ger $1 - 1 + 2 + 1 + C = 7 \;\Rightarrow\; C = 4 \;\Rightarrow$ *Svar* : $f(x,y) = ye^{x+y} + xy^2 - 2x + y^2 + 4$.

(b) $f(x,y)$ är kontinuerlig i (0,0) om $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1$. Med polära koordinater fås $\dfrac{x+y}{(x^2+y^2)^{1/4}} = \dfrac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{(\rho^2)^{1/4}} = \rho^{1/2}(\cos\varphi + \sin\varphi) \to 0\,, \rho \to 0$ eftersom $\cos\varphi + \sin\varphi$ är begränsad. Då $\rho \to 0 \Leftrightarrow (x,y) \to (0,0)$ fås $f(x,y) \to 0 \neq f(0,0)$, $(x,y) \to (0,0) \quad \Rightarrow$ *Svar* : $f(x,y)$ är inte kontinuerlig i (0,0)

2. (a) Ytan kan skrivas som nivåyta $f(x,y,z) = x - y^2 \ln z = 0$. Tangentplan i (a,b,c) är $\nabla f(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$ där $\nabla f(a,b,c) = (1, -2b\ln c, -b^2/c)$. Med $b = -1$ och $c = e$ är $a = b^2 \ln c = 1$ och $\nabla f(1,-1,e) = (1, 2, -e^{-1})$. Planet blir $(x-1) + 2(y+1) - e^{-1}(z-e) = 0$. *Svar* : $x + 2y - e^{-1}z = -2$

(b) Punkten på ytan är $(x(2,1), y(2,1), z(2,1)) = (2,1,1)$. Två tangentvektorer till ytan är $(x'_s(s,t), y'_s(s,t), z'_s(s,t)) = (t,1,0)$ och $(x'_t(s,t), y'_t(s,t), z'_t(s,t)) = (s,-1,3t^2)$ som för $s = 2$ och $t = 1$ blir $(1,1,0)$ resp. $(2,-1,3)$. I $(2,1,1)$ är därför $\bar{N} = (1,1,0) \times (2,-1,3) = (3,-3,-3)$, som är parallell med $(1,-1,-1)$, en normalvektor till ytan. Tangentplanet blir $1 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y-1) - 1 \cdot (z-1) = 0$. *Svar*: $x - y - z = 0$

3. Vi har $f'_x = (y+2)\sin z + 2x + 2z - 2$, $f'_y = (x-1)\sin z + 2y + 2z + 4$ och $f'_z = (x-1)(y+2)\cos z + 6z + 2x + 2y + 2$. Punkten $(1,-2,0)$ insatt ger $f'_x = 0+2+0-2 = 0$, $f'_y = 0-4+0+4 = 0$, $f'_z = 0+0+2-4+2 = 0$, alltså är $(1,-2,0)$ en stationär punkt. $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{zz} = -(x-1)(y+2)\sin z + 6$, $f''_{xy} = \sin z$, $f''_{xz} = (y+2)\cos z + 2$ och $f''_{yz} = (x-1)\cos z + 2$ ger Hessianen $(Hf)(1,-2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_{2,3} = 4 \pm \sqrt{12} > 0$, alltså lokalt min. Alternativt fås $Q(h,k,\ell) = 2h^2 + 2k^2 + 6\ell^2 + 4h\ell + 4k\ell = 2(h+\ell)^2 + 2k^2 + 4\ell^2 + 4k\ell = 2(h+\ell)^2 + 2(k+\ell)^2 + 2\ell^2$, tecken $+\,,+\,,+$ ger Q positivt definit, alltså är punkten lokalt min.

Svar : $(1,-2,0)$ är ett lokalt min

4. Integralen är generaliserad eftersom D är obegränsad men då funktionen är positiv i D kan vi räkna på direkt med vanliga metoder. Med polära koordinater (ρ,φ) ger $x^2 + y^2 \geq 2$ att $\sqrt{2} \leq \rho < \infty$ och $0 \leq x \leq y$ ger $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$. Med $\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \rho$ fås

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^4}\,\rho\,d\rho d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} [\frac{-1}{\rho}]_{\sqrt{2}}^{\infty} \sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b})[-\cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} = (\frac{1}{\sqrt{2}} - 0)\cdot(-0 + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\,.$$

Svar : $\frac{1}{2}$

[Beräkning kan också göras i xy-koordinater: dela då upp D i två delar, $\{0 \leq x \leq 1, \sqrt{2-x^2} \leq y < \infty\}$ och $\{1 \leq x < \infty\,,\; x \leq y < \infty\}$, och integrera y först]

5. Största och minsta värde av $f(x,y,z) = x + y - z$ existerar eftersom funktionen är kontinuerlig och nivåytan $g(x,y,z) = (x+1)^2 + 6y^2 + 3(z-1)^2 = 54$ är en ellipsoid, alltså kompakt. Vi ska undersöka punkter på $g(x,y,z) = 54$ i vilka $\nabla f(x,y,z) = (1,1,-1)$ och $\nabla g(x,y,z) = (2(x+1), 12y, 6(z-1))$ är parallella. $\nabla f \times \nabla g = \bar{0}$ ger $(6z - 6 + 12y, -2x - 2 - 6z + 6, 12y - 2x - 2) = (0,0,0)$. $6z - 6 + 12y = 0 \Rightarrow z = 1 - 2y$ och $12y - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 6y - 1$ (vilket ger att $-2x - 6z + 4 = -12y + 2 - 6 + 12y + 4 = 0$ också är uppfylld). Insatt i $g(x,y,z) = 54$ fås $(6y-1+1)^2 + 6y^2 + 3(1-2y-1)^2 = 54 \Rightarrow 54y^2 = 54 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow (x,y,z) = (5,1,-1)$ och $(x,y,z) = (-7,-1,3)$ är enda kandidater. [Alternativt: $\nabla g = k\nabla f \Rightarrow 2(x+1) = k$, $12y = k$, $6(z-1) = -k \Rightarrow x = -1 + k/2$, $y = k/12$, $z = 1 - k/6$ som insatt i $g = 54$ ger $k^2 = 144 \Rightarrow k = \pm 12$ som ger samma punkter som ovan.] Beräkning ger $f(5,1,-1) = 7$ och $f(-7,-1,3) = -11 \Rightarrow$

Svar: Minsta värde är $f(-7,-1,3) = -11$, största $f(5,1,-1) = 7$

6. Mängden D kan skrivas $0 \le z \le \pi - 2x - y$, $0 \le y \le \pi - 2x$, $0 \le x \le \pi/2 \Rightarrow$

$$\iiint\limits_D \cos z \, dxdydz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi-2x} \int_0^{\pi-2x-y} \cos z \, dzdydx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi-2x} [\sin z]_{z=0}^{z=\pi-2x-y} \, dydx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi-2x} \sin(\pi - 2x - y) \, dydx = \int_0^{\pi/2} [\cos(\pi - 2x - y)]_{y=0}^{y=\pi-2x} \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(\pi - 2x)) \, dx = [x + \frac{\sin(\pi - 2x)}{2}]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \qquad \textit{Svar}: \frac{\pi}{2}$$

7. Kedjeregeln ger $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{x}))\bar{g}'(\bar{x})$. Partiella deriveringar ger
$\bar{g}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \ln x_2 & x_1/x_2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}'(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 1 \\ u_2 e^{u_1} & e^{u_1} \end{pmatrix}$, $\bar{x} = (2,1) \Rightarrow \bar{u} = \bar{g}(\bar{x}) = (0,5) \Rightarrow$
$(\bar{f} \circ \bar{g})'(2,1) = \bar{f}'(0,5)\bar{g}'(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$

Svar: $(\bar{f} \circ \bar{g})'(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$