Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA83
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA83 Flervariabelanalys
2023-03-21 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Fullständiga motiveringar krävs. Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen
$$f(x, y) = e^x + x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y$$

2. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ eller visa att det inte existerar. (1p)

   (b) Ange de vektorer $\bar{v}$ med längd 1 för vilka riktningsderivatan i riktning $\bar{v}$ av $f(x, y) = \ln(2x + y^2)$ i punkten $(3, 2)$ är noll: $f'_{\bar{v}}(3, 2) = 0$. (1p)

   (c) Bestäm alla C^1-funktioner $f(x, y)$ sådana att $\begin{cases} f'_x(x, y) = y^2e^{x+y} + y - 1 \\ f'_y(x, y) = (y^2 + 2y)e^{x+y} + x + 2 \end{cases}$ (1p)

3. Bestäm tangentplanet P till ytan $y = x^2 - 2z^2$ i punkten där $x = 2$ och $z = 1$. Visa också att det inte finns någon annan punkt på ytan i vilken tangentplanet är parallellt med P.

4. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_D \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dxdydz$$
där $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$.

5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 5z^2$ i klotet $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 \le 1$.

6. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D e^{y-x}\sqrt{x + y}\, dxdy$$
där D är kvadraten med hörn i $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ och $(0, 2)$.

7. Bestäm lösningen $f(x, y)$ till den partiella differentialekvationen
$$f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy} = 6y$$
med bivillkoren $f(x, 0) = x^3$ och $f(0, y) = y^2$, genom att byta till variablerna $u = x - y$ och $v = y$.

Lösningsskisser TATA83/764G03 Flervariabelanalys 2023-03-21

1. Stationära punkter fås av $f'_x = e^x + 2x + 2y + 1 = 0$ (1), $f'_y = 2x + 2y + 2 = 0$ (2). (2) $\Rightarrow$ $2x + 2y = -2$, in i (1) $\Rightarrow$ $e^x - 1 = 0$ $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ $y = -x - 1 = -1$. Alltså är $(0, -1)$ enda stationära punkt.

$f''_{xx} = e^x + 2$, $f''_{xy} = 2$, $f''_{yy} = 2$ ger Hessianen $(Hf)(0,-1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_{1,2} = (5 \pm \sqrt{17})/2 > 0$, alltså lokalt minimum. Alternativt fås $Q(h,k) = 3h^2 + 4hk + 2k^2 = 2(k+h)^2 + h^2$, tecken $+\ +$ $\Rightarrow$ positivt definit $\Rightarrow$ lokalt min.

Svar : $(0, -1)$ är ett lokalt min

2. (a) Polära koordinater ger $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos\varphi \sin^2\varphi - \rho^2}{\rho^2} =$
$= \displaystyle\lim_{\rho\to 0} (\rho \cos\varphi \sin^2\varphi - 1) = 0 - 1 = -1$ eftersom $\rho \to 0$ och $\cos\varphi \sin^2\varphi$ är begränsad så $\rho \cos\varphi \sin^2\varphi \to 0$ då $\rho \to 0$.

Svar : Gränsvärdet är -1

(b) $\nabla f(x,y) = (\frac{2}{2x+y^2}, \frac{2y}{2x+y^2})$ $\Rightarrow$ $\nabla f(3,2) = (\frac{2}{10}, \frac{4}{10}) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$. För $\bar{v}$ med längd 1 är $f'_{\bar{v}}(3,2) = \nabla f(3,2) \cdot \bar{v} = \frac{1}{5}(1,2) \cdot \bar{v} = 0$ då $\bar{v}$ är ortogonal mot $(1,2)$, vilket gäller för $\bar{v}$ parallell med $(2,-1)$, $\bar{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ ger längd 1.

Svar : $\bar{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$

(c) $f'_x(x,y) = y^2 e^{x+y} + y - 1 \Rightarrow f(x,y) = y^2 e^{x+y} + xy - x + g(y) \Rightarrow f'_y(x,y) = 2ye^{x+y} + y^2 e^{x+y} + x + g'(y)$. Jämförelse med kravet $f'_y(x,y) = (y^2 + 2y)e^{x+y} + x + 2 \Rightarrow g'(y) = 2 \Rightarrow g(y) = 2y + C \Rightarrow f(x,y) = y^2 e^{x+y} + xy - x + 2y + C$.

Svar : $f(x,y) = y^2 e^{x+y} + xy - x + 2y + C$, C godtycklig konstant

3. $x = 2$ och $z = 1$ ger $y = 2^2 - 2 \cdot 1^2 = 2$. Ytan kan skrivas som nivåyta $g(x,y,z) = x^2 - 2z^2 - y = 0$ med $\nabla g(x,y,z) = (2x, -1, -4z)$. Tangentplan i $(2,2,1)$ är $\nabla g(2,2,1) \cdot (x-2, y-2, z-1) = 0 \Leftrightarrow (4,-1,-4) \cdot (x-2, y-2, z-1) = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) - (y-2) - 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 4z = 2$ är ekvation för P. Tangentplanet i en annan punkt (a,b,c) på ytan har normal $(2a, -1, -4c)$ och är parallellt med P om deras normaler är parallella. P har normal $(4,-1,-4)$, och eftersom båda normalerna har y-komponent -1 är de parallella endast om x- och z-komponenterna också är lika, så $2a = 4$ och $-4c = -4$, men det ger $a = 2$ och $c = 1$ vilket var den givna punkten, inga andra punkter finns alltså.

Svar : P ges av $4x - y - 4z = 2$

4. Mängden $D: \ 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ y \ge 0, z \ge 0$ blir i rymdpolära koordinater $E: 1 \le r \le \sqrt{2}$ (från $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2$), $0 \le \theta \le \pi/2$ (från $z \ge 0$), $0 \le \varphi \le \pi$ (från $y \ge 0$. Med $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ och $|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)}| = r^2 \sin\theta$ fås

$$\iiint_D \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dxdydz = \iiint_E \frac{(r\sin\theta\sin\varphi)(r\cos\theta)}{r^3} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{2}} r \sin^2\theta \cos\theta \sin\varphi\, drd\theta d\varphi = \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_1^{\sqrt{2}} \Big[\frac{\sin^3\theta}{3}\Big]_0^{\pi/2} \Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi =$$

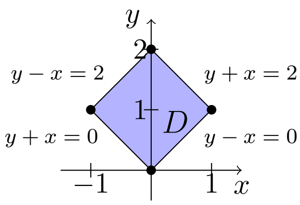
$$= \frac{2-1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1+1) = \frac{1}{3}$$

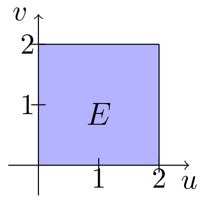
Svar : $\frac{1}{3}$

5. Största och minsta värde av $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 5z^2$ existerar eftersom funktionen är kontinuerlig och mängden $x^2+(y-2)^2+z^2 \le 1$ är ett slutet fyllt klot (alltså kompakt). Vi ska undersöka: (1) inre punkter, (2) randen $g(x,y,z) = x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$. Sök stationära inre punkter, $\nabla f(x,y,z) = (f'_x, f'_y, f'_z) = (6x, 2y, 10z) = (0,0,0) \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$, men $g(0,0,0) = 0^2 + 2^2 + 0^2 = 4 > 1$ så $(0,0,0)$ tillhör inte mängden, inga inre stationära punkter. På randen (2) söker vi punkter där $\nabla f(x,y,z)$ och $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2(y-2), 2z)$ är parallella. $\nabla f \times \nabla g = \bar{0}$ ger $(8z(5-2y), 8xz, 8x(y-3)) = (0,0,0)$. $8xz = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $z = 0$.
$x = 0 \Rightarrow z(5-2y) = 0$, ger antingen $z = 0$ som insatt i $g = 1$ ger $(y-2)^2 = 1 \Rightarrow y = 3, y = 1$ så $(0,3,0)$ och $(0,1,0)$ är kandidater, eller $y = 5/2$ som insatt i $g = 1$ ger $z^2 = 3/4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}/2$ så $(0, 5/2, \pm\sqrt{3}/2)$ är kandidater.
$z = 0 \Rightarrow x(2y-6) = 0 \Rightarrow$ antingen $x = 0$ som insatt i $g = 1$ igen ger $y = 3, y = 1$, eller $y = 3$ som insatt i $g = 1$ ger $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Inga nya kandidater här.
Vi får alltså fyra kandidater: $(0,3,0)$, $(0,1,0)$, $(0,5/2,\sqrt{3}/2)$, $(0,5/2,-\sqrt{3}/2)$.
[Alternativt: $\nabla g = k\nabla f \Rightarrow 2x = 6kx$, $2(y-2) = 2ky$, $2z = 10kz$. $2x = 6kx \Rightarrow x = 0$ eller $k = 1/3$. $x = 0$ med $2z = 10kz$ ger antingen $z = 0$ som ger $y = 3, y = 1$ från $g = 1$, eller $k = 1/5$ som ger $y = 5/2$ från $2(y-2) = 2ky$ och $z = \pm\sqrt{3}/2$ från $g = 1$. $k = 1/3$ ger $y = 3$ från $2(y-2) = 2ky$ och $z = 0$ från $2z = 10kz$, vilket ger $x = 0$ från $g = 1$. Samma fyra kandidater hittas alltså på detta sätt.]
Funktionsvärdena i punkterna är $f(0,3,0) = 9$, $f(0,1,0) = 1$, $f(0,5/2,\sqrt{3}/2) = 10$ och $f(0,5/2,-\sqrt{3}/2) = 10$. Jämförelse ger

Svar: Minsta värde är $f(0,1,0) = 1$, största $f(0,5/2,\pm\sqrt{3}/2) = 10$

6. Området D har kanter $y+x=0$, $y+x=2$, $y-x=0$ och $y-x=2$, och kan därför skrivas $0 \le y+x \le 2$, $0 \le y-x \le 2$, se figur.





Med nya variabler $u = y+x$, $v = y-x$ avbildas D på kvadraten E: $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2$ i uv-planet. Vi har $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ så $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = \dfrac{1}{2}$ och

$$\iint_D e^{y-x}\sqrt{x+y}\,dxdy = \iint_E e^v\sqrt{u}\,|\frac{1}{2}|\,dudv = \frac{1}{2}\big[e^v\big]_0^2\big[\frac{2u^{3/2}}{3}\big]_0^2 = \frac{1}{2}(e^2-1)\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Svar : $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(e^2-1)$

7. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -f'_u + f'_v$. Detta ger $f''_{xx} = (f'_u)'_u = f''_{uu}$, $f''_{xy} = -(f'_u)'_u + (f'_u)'_v = -f''_{uu} + f''_{uv}$ och $f''_{yy} = -(-f'_u + f'_v)'_u + (-f'_u + f'_v)'_v = f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv}$. Insatt i ekvationen fås $f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy} = 6y \Leftrightarrow f''_{uu} + 2(-f''_{uu} + f''_{uv}) + f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv} = 6v \Leftrightarrow f''_{vv} = 6v \Leftrightarrow f'_v = 3v^2 + g(u) \Leftrightarrow f = v^3 + vg(u) + h(u)$, g och h godtyckliga envariabelfunktioner. Alltså är $f(x,y) = y^3 + yg(x-y) + h(x-y)$. Bivillkoren ger $f(x,0) = h(x) = x^3$ och $f(0,y) = y^3 + yg(-y) + h(-y) = y^2 \Rightarrow$ $[h(t) = t^3, t = -y \Rightarrow h(-y) = (-y)^3 = -y^3]$ $y^3 + yg(-y) - y^3 = y^2 \Rightarrow g(-y) = y \Rightarrow$ $g(t) = -t \Rightarrow [t = x-y$ i $g(t) = -t$ och $h(t) = t^3]$ $f(x,y) = y^3 + y(y-x) + (x-y)^3$

Svar : $f(x,y) = y^3 + y(y-x) + (x-y)^3$