Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA83
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA83 Flervariabelanalys
2023-06-09 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Fullständiga motiveringar krävs. Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2+(z+1)^2}$ eller visa att det inte existerar. (2p)

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2}$ eller visa att det inte existerar. (1p)

2. (a) Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan $x^4+x^2y^2+y^2=9$ i punkten $(x,y)=(1,2)$ på kurvan. (1p)

   (b) Bestäm en tangentvektor $\bar{v}$ till parameterkurvan $(\,x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t)\,) = (\,t^3\,,\,t^4\,,\,t^2+1\,)$ i punkten $(x,y,z)=(-1,1,2)$ på kurvan. (1p)

   (c) Bestäm tangentplanet till nivåytan $\dfrac{x^3y^2}{z}=2$ i punkten $(x,y,z)=(1,2,2)$ på ytan. (1p)

3. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D x\,dxdy$$
där D är den *begränsade* mängd som avgränsas av kurvorna $y=x^2$ och $y=x+2$. Rita en figur över D.

4. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen
$$f(x,y)=xye^{x-y}$$

5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen $f(x,y,z)=x-y+z$ då $x^2+y^2+z^2=18$ och $2x+y-z=6$.

6. Beräkna den *generaliserade* trippelintegralen
$$\iiint_D \frac{(z+1)^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz$$
där $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\geq 4\,,\,z\geq 0\}$.

7. Ett rätblock har kantlängder 2 m, 3 m och 6 m. Om varje kantlängd ökas med 0.01 m, använd uppskattning med differential för att ange med hur många procent rätblockets volym ökar.

Lösningsskisser TATA83/764G03 Flervariabelanalys 2023-06-09

1. (a) Med $t = x - 1$ och $s = z + 1$, och därefter rymdpolära koordinater för (t, y, s) ($y = r \sin\theta \sin\varphi,\ t^2 + y^2 + s^2 = r^2$), fås

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \lim_{(t,y,s)\to(0,0,0)} \frac{y^3}{t^2 + y^2 + s^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \sin^3\theta \sin^3\varphi}{r^2} =$$

$= \lim_{r\to 0}(r \sin^3\theta \sin^3\varphi) = 0$ eftersom $r \to 0$ och $\sin^3\theta \sin^3\varphi$ är begränsat.

Svar : Gränsvärdet är 0

(b) Polära koordinater ger

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{x^2 + x + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho^2 + \rho\cos\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to\infty} (1 + \frac{1}{\rho}\cos\varphi) = 1 + 0 = 1$$

eftersom $1/\rho \to 0$ och $\cos\varphi$ är begränsad. *Svar* : Gränsvärdet är 1

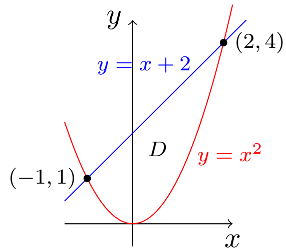
2. (a) Med $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^2$ är $\nabla f(x, y) = (4x^3 + 2xy^2, 2x^2y + 2y)$ normalvektor till nivåkurvan $f(x, y) = 9$. I punkten (1,2) [uppfyller $f(1, 2) = 9$] är $\bar{N} = \nabla f(1, 2) = (12, 8)$ normalvektor. Då gäller att (x, y) tillhör tangentlinjen om $\bar{N} \cdot (x - 1, y - 2) = 12(x - 1) + 8(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y = 7$. *Svar* : $3x + 2y = 7$

(b) Punkten $(-1, 1, 2)$ på kurvan svarar mot parametervärde $t = -1$. Tangentvektor i godtycklig punkt på kurvan är $\bar{T}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (3t^2, 4t^3, 2t) \Rightarrow$ tangentvektor i $(-1, 1, 2)$ är (vektorer parallella med) $\bar{T}(-1) = (3, -4, -2)$ *Svar* : $(3, -4, -2)$

(c) Med $f(x, y, z) = x^3y^2/z$ är $\bar{N} = \nabla f(1, 2, 2)$ normalvektor till nivåytan $f(x, y, z) = 2$ i punkten $(1, 2, 2)$ [$f(1, 2, 2) = 2$]. $\nabla f(x, y, z) = (f'_x, f'_y, f'_z) = (3x^2y^2/z, 2x^3y/z, -x^3y^2/z^2)$ $\Rightarrow \bar{N} = (6, 2, -1) \Rightarrow$ tangentplanet ges av $\bar{N} \cdot (x - 1, y - 2, z - 2) = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) + 2(y - 2) - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - z = 8$. *Svar* : $6x + 2y - z = 8$

3. Skärningspunkter mellan kurvorna fås av $x^2 = x + 2 \Rightarrow x = -1$, $x = 2$.

Integrationsgränserna blir därför $-1 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le x+2$, se figur.



$$\iint_D x\,dxdy = \int_{-1}^{2} (\int_{x^2}^{x+2} x\,dy)dx = \int_{-1}^{2} [xy]_{y=x^2}^{x+2}\,dx = \int_{-1}^{2} (x^2 + 2x - x^3)\,dx =$$

$$= [\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4}]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 4 - 4 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Svar : $\frac{9}{4}$

4. Stationära punkter fås av $f'_x = ye^{x-y} + xye^{x-y} = y(x + 1)e^{x-y} = 0$ (1), $f'_y = xe^{x-y} - xye^{x-y} = x(1 - y)e^{x-y} = 0$ (2). (2) $\Rightarrow\ x(1 - y) = 0 \Rightarrow\ x = 0$ eller $y = 1$. $x = 0$ i (1) $\Rightarrow y = 0$. $y = 1$ i (1) $\Rightarrow\ x = -1$. Alltså är $(0, 0)$ och $(-1, 1)$ stationära punkter.
$f''_{xx} = y(2 + x)e^{x-y}$, $f''_{xy} = (1 + x)(1 - y)e^{x-y}$, $f''_{yy} = x(y - 2)e^{x-y}$ ger i $(0, 0)$ Hessianen $(Hf)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_{1,2} = \pm 1$, alltså sadelpunkt. Alternativt fås $Q(h, k) = 2hk$ med t.ex. $Q(1, 1) = 1 > 0$ och $Q(1, -1) = -1 < 0 \Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ sadelpunkt.

I $(-1,1)$ fås $(Hf)(-1,1)=\begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_{1,2}=e^{-2}>0$, alltså ett lokalt min. Alternativt fås $Q(h,k)=e^{-2}h^2+e^{-2}k^2$, tecken $+\ +$ $\Rightarrow$ positivt definit $\Rightarrow$ lokalt min.

Svar : $(-1,1)$ är ett lokalt min och $(0,0)$ en sadelpunkt

5. Mängden är skärningen mellan sfären $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=18$ och planet $h(x,y,z)=2x+y-z=6$, dvs en cirkel. Största och minsta värde av $f(x,y,z)=x-y+z$ existerar eftersom funktionen är kontinuerlig och mängden är kompakt. Största och minsta värde finns i punkter där $\nabla f(x,y,z)=(1,-1,1)$, $\nabla g(x,y,z)=(2x,2y,2z)$ och $\nabla h(x,y,z)=(2,1,-1)$ är linjärt beroende. Insatta i en 3×3 - determinant som sätts lika med 0, fås $-6y-6z=0\Rightarrow z=-y$. Insatt i $h=6$ fås $2x+2y=6\Rightarrow x=3-y$. $z=-y$ och $x=3-y$ i $g=18$ ger $(3-y)^2+y^2+(-y)^2=18\Rightarrow 3y^2-6y+9=18\Rightarrow y^2-2y-3=0\Rightarrow$ $y=3$ eller $y=-1$. $y=3$ ger $x=0$ och $z=-3$, $y=-1$ ger $x=4$ och $z=1$, så $(0,3,-3)$ och $(4,-1,1)$ är de enda kandidaterna till största och minsta värde. $f(0,3,-3)=-6$, $f(4,-1,1)=6$ $\Rightarrow$

Svar: Minsta värde är $f(0,3,-3)=-6$, största $f(4,-1,1)=6$

6. Integralen är generaliserad eftersom mängden är obegränsad, men då funktionen är positiv överallt kan vi räkna på med vanliga metoder. Mängden $D:\ x^2+y^2+z^2\geq 4,\ z\geq 0$ blir i rymdpolära koordinater $E: r\geq 2$ (från $x^2+y^2+z^2\geq 4$), $0\leq\theta\leq\pi/2$ (från $z\geq 0$), $0\leq\varphi<\ 2\pi$. Med $z=r\cos\theta$, $x^2+y^2+z^2=r^2$ och $|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)}|=r^2\sin\theta$ fås

$$\iiint\limits_D \frac{(z+1)^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz = \iiint\limits_E \frac{(r\cos\theta+1)^2}{r^6}\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi =$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_2^{\infty}\left(\frac{\cos^2\theta}{r^2}+\frac{2\cos\theta}{r^3}+\frac{1}{r^4}\right)\sin\theta\,drd\theta d\varphi=\int_2^{\infty}[\varphi]_0^{2\pi}\Big[-\frac{\cos^3\theta}{3r^2}-\frac{\cos^2\theta}{r^3}-\frac{\cos\theta}{r^4}\Big]_0^{\pi/2}dr=$$

$$=2\pi\int_2^{\infty}\left(\frac{1}{3r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}\right)dr=2\pi\Big[-\frac{1}{3r}-\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{3r^3}\Big]_2^{\infty}=$$

$$=2\pi\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3b}-\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)=2\pi\cdot\frac{8}{24}=\frac{2\pi}{3}$$

Svar : $\frac{2\pi}{3}$

7. Om a, b och c betecknar kantlängderna är volymen $V(a,b,c)=abc$. För små ändringar Δa, Δb och Δc i a, b och c gäller att ändringen ΔV i volym kan approximeras med differentialen av V:

$\Delta V\approx dV_{(a,b,c)}(\Delta a,\Delta b,\Delta c)=V'_a(a,b,c)\Delta a+V'_b(a,b,c)\Delta b+V'_c(a,b,c)\Delta c$.

Vi har $V'_a(a,b,c)=bc$, $V'_b(a,b,c)=ac$ och $V'_c(a,b,c)=ab$. Med $a=2$ (meter), $b=3$ och $c=6$ fås $V(2,3,6)=36$ (m^3), $V'_a(2,3,6)=18$, $V'_b(2,3,6)=12$, och $V'_c(2,3,6)=6$. Detta ger $\Delta V\approx dV_{(2,3,6)}(\Delta a,\Delta b,\Delta c)=18\Delta a+12\Delta b+6\Delta c$. För $\Delta a=\Delta b=\Delta c=0.01$ fås då $\Delta V\approx 0.18+0.12+0.06=0.36$ (m^3) $\Rightarrow \Delta V/V\approx 0.36/36=0.01$ $\Rightarrow$

Svar : Ökningen är 1 procent