Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA83
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA83 Flervariabelanalys
2023-08-16 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Fullständiga motiveringar krävs. Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (a) Bestäm lösningen $f(x,y)$ till den partiella differentialekvationen

$$xf'_x - 2yf'_y = 2x^2$$

med bivillkoret $f(2,y) = 8y$, genom att byta till variablerna $u = x^2y$ och $v = x$. (2p)

(b) Transformera f''_{xy} till de nya variablerna $u = x^2y$ och $v = x$. (1p)

2. (a) I vilken riktning *växer* $f(x,y,z) = x^3(y+z^2)$ snabbast i punkten $(1,-3,2)$? (1p)

(b) Bestäm funktionalmatrisen $\bar{f}'(\bar{w}) = \dfrac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)}$ av $\bar{f}:\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ som ges av $\bar{f}(\bar{w}) = \begin{pmatrix} f_1(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \\ f_2(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \\ f_3(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \\ w_5 & w_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. (1p)

(c) Bestäm tangentlinjen till kurvan $(x(t),y(t),z(t)) = (t+2, t^2-1, t^3)$ i punkten på kurvan där $t=1$. (1p)

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (y-x)\sqrt{x^2+y^2}\;dxdy$$

där $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2\,,\ y\ge 0\,,\ y\ge x\}$.

4. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till funktionen

$$f(x,y,z) = y^3 - x^2 - y^2 - 4z^2 + 8yz + 4x$$

5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av $f(x,y) = x-3y$ då $(x+1)^2 + 3(y-1)^2 \le 16$.

6. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av olikheterna $x^2+y+z\le 1$, $y\ge 0$ och $z\ge 0$.

7. Bestäm de punkter på ytan $x^2-2y^2+z^2 = 8$ i vilka ytans tangentplan är parallellt med planet $3x+2y+z=0$, samt ange tangentplanens ekvationer i dessa punkter.

Lösningsskisser TATA83/764G03 Flervariabelanalys 2023-08-16

1. a) Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2xyf'_u + f'_v$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = x^2 f'_u$. Detta ger $xf'_x - 2yf'_y = 2x^2 \Leftrightarrow x(2xyf'_u + f'_v) - 2yx^2 f'_u = xf'_v = 2x^2$ $(\forall x, y) \Leftrightarrow f'_v = 2x = 2v \Leftrightarrow f = v^2 + g(u)$, g godtycklig. Alltså blir $f(x,y) = x^2 + g(x^2 y)$. Bivillkoret $f(2,y) = 8y$ ger [sätt in $x = 2$] $4 + g(4y) = 8y \Rightarrow [t = 4y] \Rightarrow g(t) = 2t - 4 \Rightarrow [t = x^2 y] \Rightarrow g(x^2 y) = 2x^2 y - 4 \Rightarrow$ *Svar* : $f(x,y) = x^2 + 2x^2 y - 4$.

(b) Från (a) fås $f''_{xy} = (f'_x)'_y = (2xyf'_u + f'_v)'_y = 2xf'_u + 2xy(f'_u)'_y + (f'_v)'_y$. Använd $(\ )'_y = x^2(\ )'_u$ $\Rightarrow f''_{xy} = 2xf'_u + 2xy(x^2 f''_{uu}) + x^2 f''_{uv} = 2vf'_u + 2uvf''_{uu} + v^2 f''_{uv}$ $\Rightarrow$

Svar : $f''_{xy} = 2vf'_u + 2uvf''_{uu} + v^2 f''_{uv}$

2. a) f växer snabbast i gradientens riktning. $\nabla f(x,y,z) = (3x^2(y+z^2), x^3, 2x^3 z) \Rightarrow \nabla f(1,-3,2) = (3,1,4)$ $\Rightarrow$ *Svar* : I riktning $(3,1,4)$

(b) $$\bar{f}(\bar{w}) = \begin{pmatrix} f_1(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \\ f_2(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \\ f_3(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \\ w_5 & w_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5w_1 + 3w_2 \\ 5w_3 + 3w_4 \\ 5w_5 + 3w_6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\bar{f}'(\bar{w}) = \begin{pmatrix} (f_1)'_{w_1} & (f_1)'_{w_2} & (f_1)'_{w_3} & (f_1)'_{w_4} & (f_1)'_{w_5} & (f_1)'_{w_6} \\ (f_2)'_{w_1} & (f_2)'_{w_2} & (f_2)'_{w_3} & (f_2)'_{w_4} & (f_2)'_{w_5} & (f_2)'_{w_6} \\ (f_3)'_{w_1} & (f_3)'_{w_2} & (f_3)'_{w_3} & (f_3)'_{w_4} & (f_3)'_{w_5} & (f_3)'_{w_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Tangentvektorer fås av $\bar{T}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (1, 2t, 3t^2)$. $t = 1$ ger punkten $(x(1), y(1), z(1)) = (3,0,1)$ på kurvan där $\bar{T}(1) = (1,2,3)$. Tangentlinjen ges alltså av $(x,y,z) = (3,0,1) + s(1,2,3)$, $s \in \mathbb{R}$ (s parameter). *Svar* : $(x,y,z) = (3,0,1) + s(1,2,3)$

3. Med polära koordinater (ρ, φ) ger $x^2 + y^2 \le 2$ att $0 \le \rho \le \sqrt{2}$ och $y \ge 0$, $y \ge x$ ger $\pi/4 \le \varphi \le \pi$. Med $\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \rho$ fås

$$\iint_D (y - x)\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (\rho \sin\varphi - \rho\cos\varphi)\rho \cdot \rho \, d\rho d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi} [\frac{\rho^4}{4}]_0^{\sqrt{2}} (\sin\varphi - \cos\varphi)\, d\varphi = 1 \cdot [-\cos\varphi - \sin\varphi]_{\pi/4}^{\pi} = 1 - 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Svar : $1 + \sqrt{2}$

4. Stationära punkter fås av $f'_x = -2x + 4 = 0$ (1), $f'_y = 3y^2 - 2y + 8z = 0$ (2), $f'_z = -8z + 8y = 0$ (3). (1) $\Rightarrow x = 2$. (3) $\Rightarrow y = z$, (3) i (2) $\Rightarrow 3y^2 + 6y = 0 \Rightarrow y = 0$ som i (3) ger $z = 0$, eller $y = -2$ som i (2) ger $z = -2$. Alltså är $(2,0,0)$ och $(2,-2,-2)$ stationära punkter. $f''_{xx} = -2$, $f''_{yy} = 6y - 2$, $f''_{zz} = -8$, $f''_{xy} = f''_{xz} = 0$ och $f''_{yz} = 8$ ger Hessianen

$(Hf)(2,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = -5 + \sqrt{73} > 0$ och $\lambda_3 = -5 - \sqrt{73} < 0$, tecken $+\,,-\,,-$ ger att $(2,0,0)$ är en sadelpunkt.

Alternativt fås $Q(h,k,\ell) = -2h^2 - 2k^2 - 8\ell^2 + 16k\ell = -2h^2 - 2(k - 4\ell)^2 + 24\ell^2$, tecken $+\,,-\,,-$ ger Q indefinit, alltså är $(2,0,0)$ en sadelpunkt.

I $(2,-2,-2)$ fås $(Hf)(2,-2,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 8 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = -11 + \sqrt{73} < 0$ och $\lambda_3 = -11 - \sqrt{73} < 0$, tecken $-\,,-\,,-$ ger att $(2,-2,-2)$ är ett lokalt max.

Alternativt fås $Q(h,k,\ell) = -2h^2 - 14k^2 - 8\ell^2 + 16k\ell = -2h^2 - 8(\ell - k)^2 - 6k^2$, tecken $-\,,-\,,-$ ger Q negativt definit, alltså är $(2,-2,-2)$ ett lokalt max.

Svar : Lokalt max i $(2,-2,-2)$, sadelpunkt i $(2,0,0)$

5. Största och minsta värde av $f(x,y) = x - 3y$ existerar eftersom funktionen är kontinuerlig och mängden $(x+1)^2 + 3(y-1)^2 \le 16$ är en sluten fylld ellips (alltså kompakt). Vi ska undersöka: (1) inre punkter, (2) randen $g(x,y) = (x+1)^2+3(y-1)^2 = 16$. Sök stationära inre punkter, $\nabla f(x,y) = (f'_x, f'_y) = (1,-3) \neq (0,0)$, inga stationära punkter. På randen (2) söker vi punkter där $\nabla f(x,y)$ och $\nabla g(x,y) = (2(x+1), 6(y-1))$ är parallella. Insatta som kolonner i en 2×2 - determinant som sätts lika med 0, fås $6y+6x = 0 \;\Rightarrow\; y = -x$. Insatt i $g = 16$ fås $(x+1)^2+3(-x-1)^2 = 16 \Rightarrow 4x^2+8x-12 = 0 \Rightarrow x = 1$ eller $x = -3$. $y = -x$ ger att vi hittar två kandidater på randen: $(1,-1)$ och $(-3,3)$. $f(1,-1) = 4$ och $f(-3,3) = -12 \Rightarrow$

Svar: Minsta värde är $f(-3,3) = -12$, största $f(1,-1) = 4$

6. Mängden D kan skrivas $0 \le z \le 1-x^2-y$, $0 \le y \le 1-x^2$, $-1 \le x \le 1 \;\Rightarrow$ Volymen blir

$$V = \iiint_D 1\,dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{1-x^2-y} dzdydx = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} [z]_{z=0}^{z=1-x^2-y}\,dydx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} (1-x^2-y)\,dydx = \int_{-1}^{1} [y-x^2y-\frac{y^2}{2}]_0^{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2-x^2(1-x^2)-\frac{(1-x^2)2}{2})\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-2x^2+x^4)\,dx = \frac{1}{2}[x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$

Svar : Volymen är $\frac{8}{15}$

7. Ytan kan skrivas $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 = 8$. I en punkt (a,b,c) på ytan har tangentplanet normalvektor $\bar{N} = \nabla f(a,b,c) = (2a, -4b, 2c)$. Vi söker punkter där $\bar{N}$ är parallell med $\bar{n} = (3,2,1)$ som är normalvektor till planet $3x+2y+z = 0$. $\bar{N} = k\bar{n}$ ger $2a = 3k$, $-4b = 2k$, $2c = k$, dvs $a = 3k/2$, $b = -k/2$, $c = k/2$. Insatt i $f = 8$ fås $9k^2/4 - 2k^2/4 + k^2/4 = 2k^2 = 8 \Rightarrow k = \pm 2 \Rightarrow$ vi får punkterna $(a,b,c) = (3,-1,1)$ och $(-3,1,-1)$.

[Alternativt ger $\bar{N} \times \bar{n} = \bar{0}$ att $-4b-4c = 0$, $6c-2a = 0$, $4a-12b = 0 \;\Rightarrow a = 3c$, $b = -c$ som insatt i $f = 8$ ger $8c^2 = 8 \;\Rightarrow\; c = \pm 1$ och samma punkter fås på detta sätt.]

Tangentplan i $(3,-1,1)$ är $3(x-3)+2(y+1)+1\cdot(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x+2y+z = 8$, och i $(-3,1,-1)$ är planet $3(x+3)+2(y-1)+1\cdot(z+1) = 0 \Leftrightarrow 3x+2y+z = -8$.

Svar : Punkterna är $\pm(3,-1,1)$ med tangentplanen $3x+2y+z = \pm 8$