

Tentamen i Matematisk grundkurs 2023-08-15 kl 14-19

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva/radianskiva utan formler får användas. Formelsamling, räknedosa och andra hjälpmedel är ej tillåtna.

Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. På uppgift 3 ska dock *endast svar* ges. Svaren ska förstås ges på enklast möjliga form.

En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng¹ till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9.

För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 12 resp. 15 poäng.

Svar mm finns på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna $\sum_{k=5}^{50} 3 \cdot (-2)^k$. (1 p)

(b) Lös olikheten $\frac{2}{x} \geq \frac{2x+5}{x+1}$. (2 p)

2. (a) Förenkla uttrycket $\frac{\sqrt{e^{-\ln 3}} \cdot \ln \sqrt{e^3}}{e^{\frac{1}{2} \ln 3}}$ så långt det är möjligt. (1 p)

(b) Finn alla reella lösningar till ekvationen $e^x + e^{\ln 2} = e^{-x+4 \ln 2}$. (2 p)

3. På denna uppgift ska *endast svar* ges. *Inga* lösningar ska lämnas in på uppgift 3.

(a) Lös ekvationen $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(5x - \frac{2\pi}{5}\right)$. (1 p)

(b) Förenkla $\sin(\arctan 6)$. (1 p)

(c) Beräkna $\arccos\left(\cos\left(-\frac{62\pi}{9}\right)\right)$. (1 p)

4. Lös ekvationen $\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x = \sqrt{6}$.

5. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{\sqrt{\ln x - 1}}$.

6. (a) Bevisa att $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$ för alla reella x . (1 p)

(b) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^8 + (i + \sqrt{3})^8 = 0$. (2 p)

7. Låt $a, z \in \mathbf{C}$ med $|a| < 1$. Visa att $|z| < 1$ om och endast om $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1$.

¹Godkänd dugga 1 ger 2 bonuspoäng. Godkänd dugga 2 ger 4 bonuspoäng.