Lösningsförslag TATB01 2023-09-04 8-11

1. (a) Summan är aritmetisk och har $102 - 3 + 1 = 100$ termer. Den första termen ser vi är $3 \cdot 3 - 1 = 8$ och sista termen är $3 \cdot 102 - 1 = 305$, så summan blir

$$\sum_{k=3}^{102}(3k-1) = \frac{8+305}{2} \cdot 100 = 313 \cdot 50 = 15650.$$

(b) Enligt känd räknelag följt av definition:

$$\binom{25}{22} = \binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2} = 25 \cdot 4 \cdot 23 = 2300.$$

(c) Vi utför en polynomdivision.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & & & x^2 & - & 2x & + & 6 & \\
\hline
 & x^3 & + & & + & 2\,x & - & 7 & \multicolumn{1}{|l|}{x+2} \\
\cline{9-9}
- & (x^3 & + & 2x^2) & & & & & \\
\cline{1-8}
 & & & -2\,x^2 & + & 2\,x & - & 7 & \\
 & & - & (-2\,x^2 & - & 4\,x) & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & & 6\,x & - & 7 & \\
 & & & & - & (6\,x & + & 12) & \\
\cline{3-8}
 & & & & & & & -19 &
\end{array}$$

Polynomdivisionen visar att

$$x^3 + 2x - 7 = (x^2 - 2x + 6)(x + 2) - 19,$$

så kvoten är $x^2 - 2x + 6$ och resten är -19. Således gäller att

$$\frac{x^3 + 2x - 7}{x + 2} = x^2 - 2x + 6 - \frac{19}{x + 2}.$$

Svar: (a) 15650 (b) 2300 (c) $\dfrac{x^3 + 2x - 7}{x + 2} = x^2 - 2x + 6 - \dfrac{19}{x + 2}$.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{1-x} \leq 8 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq \frac{1+2x}{x(1-x)} - 8 = \frac{1 + 2x - 8x(1-x)}{x(1-x)} = 8\,\frac{x^2 - \frac{3x}{4} + \frac{1}{8}}{x(1-x)}.$$

Vi noterar att

$$x^2 - \frac{3x}{4} + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

så

$$0 \geq 8\,\frac{x^2 - \frac{3x}{4} + \frac{1}{8}}{x(1-x)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)}{x(1-x)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)}{x(x-1)}.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1/4$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1/2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-1/4)(x-1/2)}{x(x-1)}$	$+$	☠	$-$	0	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x < 0,\ 1/4 \leq x \leq 1/2$ eller $x > 1$.

Svar: $x < 0$, $1/4 \leq x \leq 1/2$ eller $x > 1$.

3. Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{13-x} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{13-x} = 1-x \\
&\Rightarrow \quad 13 - x = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 4 \quad \text{eller} \quad x = -3.
\end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = 4$ ser vi att

$$\text{VL} = 4 + \sqrt{13-4} = 4 + \sqrt{9} = 7 \neq 1 = \text{HL},$$

så $x = 4$ är *inte* en lösning. Om $x = -3$ är

$$\text{VL} = -3 + \sqrt{13+3} = -3 + \sqrt{16} = -3 + 4 = 1 = \text{HL}.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens så är $x = -3$ en lösning.

Svar: $x = -3$.

4. Vi kvadratkompletterar vänsterledet för att få en enklare ekvation att hantera:

$$\begin{aligned}
z^2 + 2z - iz + 2 - 4i &= \left(z + 1 - \frac{i}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{i}{2}\right)^2 + 2 - 4i \\
&= \left(z + 1 - \frac{i}{2}\right)^2 - \left(1 - i - \frac{1}{4}\right) + 2 - 4i \\
&= \left(z + 1 - \frac{i}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} - 3i.
\end{aligned}$$

Låt $z + 1 - \dfrac{i}{2} = x + iy$ där $x,\ y \in \mathbf{R}$. Vi söker nu alla lösningar till

$$(x + iy)^2 = -\frac{5}{4} + 3i. \tag{†}$$

Då gäller att

$$x^2 + 2ixy - y^2 = -\frac{5}{4} + 3i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -\dfrac{5}{4}, \\ xy = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vidare följer det av (†) att

$$x^2 + y^2 = \left| -\frac{5}{4} + 3i \right| = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{13}{4}.$$

Härur kan vi till exempel se att

$$(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Eftersom $y = \dfrac{3}{2x}$ så erhåller vi lösningarna

$$z = x + iy - 1 + \frac{i}{2} = \pm \left(1 + \frac{3i}{2} \right) - 1 + \frac{i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = 2i \quad \text{eller} \quad z = -2 - i.$$

Svar: $z = 2i$ eller $z = -2 - i$.

5. Eftersom summan är geometrisk med kvoten $q \neq 1$ (då termerna är olika) har termerna formen $a_k = aq^k$, $k = 0, 1, \ldots, 50$, med $a > 0$, så vi erhåller att

$$s = \sum_{k=0}^{50} aq^k = a\,\frac{q^{51} - 1}{q - 1}.$$

Vidare noterar vi att även $\sqrt{a_k} = \sqrt{a}\sqrt{q^k} = \sqrt{a}\, q^{k/2}$ är en geometrisk följd med kvoten $\sqrt{q}$ så

$$s_1 = \sum_{k=0}^{50} \sqrt{a_k} = \sqrt{a}\,\frac{q^{51/2} - 1}{\sqrt{q} - 1}.$$

Dessutom är även s_2 en geometrisk summa, med kvoten $-\sqrt{q}$ och första term $\sqrt{a}$, så

$$s_2 = \sum_{k=0}^{50} (-1)^k \sqrt{a_k} = \sqrt{a}\,\frac{(-\sqrt{q})^{51} - 1}{-\sqrt{q} - 1} = \sqrt{a}\,\frac{-(\sqrt{q})^{51} - 1}{-\sqrt{q} - 1} = \sqrt{a}\,\frac{q^{51/2} + 1}{\sqrt{q} + 1}.$$

Vi ser att både nämnarna och täljarna i s_1 och s_2 är varandras konjugatuttryck, så vi testar att räkna ut $s_1 \cdot s_2$:

$$s_1 \cdot s_2 = \sqrt{a}\,\frac{q^{51/2} - 1}{\sqrt{q} - 1} \cdot \sqrt{a}\,\frac{q^{51/2} + 1}{\sqrt{q} + 1} = a\,\frac{(q^{51/2} - 1)(q^{51/2} + 1)}{(\sqrt{q} - 1)(\sqrt{q} + 1)} = a\,\frac{q^{51} - 1}{q - 1} = s.$$

Svar: $s = s_1 \cdot s_2$.