Lösningsförslag TATB01 2023-10-18 8-11

1. (a) Eftersom $(-1)^k\,2^{k-1} = \frac{1}{2}\,(-2)^k$ är summan geometrisk med kvoten -2. Vidare har vi $99 - 1 + 1 = 99$ termer och första term -1, så

$$\sum_{k=1}^{99}(-1)^k\,2^{k-1} = -\frac{(-2)^{99}-1}{-2-1} = \frac{1}{3}\left((-2)^{99}-1\right) = -\frac{1}{3}\left(2^{99}+1\right).$$

(b) Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Då gäller att den givna ekvationen är ekvivalent med

$$3 - 2i = z + (2-i)\bar{z} = (x+iy) + (2-i)(x-iy) = 3x - y - i(x+y)$$

så likhet gäller om och endast om

$$3x - y = 3 \quad \text{och} \quad x + y = 2.$$

Alltså måste

$$y = 3x - 3 \quad \text{och} \quad 4x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{4} \quad \text{och} \quad y = \frac{3}{4},$$

vilket ger att $z = \frac{5}{4} + i\frac{3}{4}$ är den enda lösningen.

(c) Cirkelns ekvation ges av

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 5 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y + \frac{5}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + \frac{5}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = \frac{15}{2}, \end{aligned}$$

så medelpunkten blir $(3, -1)$ och radien $\sqrt{\frac{15}{2}}$.

Svar: (a) $-\frac{1}{3}\left(2^{99}+1\right)$ (b) $z = \frac{1}{4}(5+3i)$ (c) medelpunkt: $(3, -1)$; radie $\sqrt{\frac{15}{2}}$.

2. Beloppen definieras enligt

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, & x \geq 5/2, \\ 5-2x, & x \leq 5/2, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1, \\ -x-1, & x \leq -1. \end{cases}$$

Intressanta punkter är alltså $x = 5/2$ och $x = -1$. Vi delar upp i tre fall.

Fall 1: $x \leq -1$. Då är

$$\begin{aligned} |2x-5| - |x+1| = 3x \quad &\Leftrightarrow \quad 5 - 2x + 1 + x = 3x \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 4x \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

vilket inte uppfyller kravet. Alltså ingen lösning (i detta fall).

Fall 2: $-1 \leq x \leq 5/2$. Då är

$$|2x-5| - |x+1| = 3x \quad \Leftrightarrow \quad 5 - 2x - (x+1) = 3x \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 4, \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

Här ser vi att $x = 2/3$ uppfyller att $-1 \leq x \leq 5/2$ och därmed är en lösning.

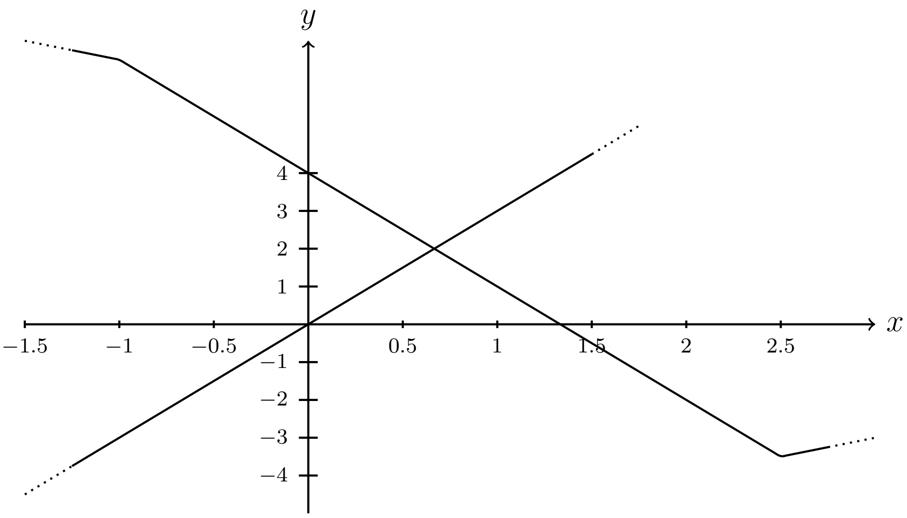
Fall 3: $x \geq 5/2$. Då är

$$\begin{aligned} |2x-5| - |x+1| = 3x \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - 5 - (x+1) = 3x \quad \Leftrightarrow \quad -6 = 2x \\ &\Leftrightarrow \quad x = -3, \end{aligned}$$

vilket inte uppfyller kravet. Alltså ingen lösning (i detta fall).

Svar: $x = 2/3$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{6}{2-x} - \frac{1}{x+1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq \frac{6(x+1) - (2-x)}{(2-x)(x+1)} - 2 = \frac{2x^2 + 5x}{(2-x)(x+1)}$$

så

$$0 \geq \frac{2x^2 + 5x}{(2-x)(x+1)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{x\,(2x+5)}{(x-2)(x+1)}.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

		$-\frac{5}{2}$		-1		0		2	
$2x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x(2x+5)}{(x+1)(x-2)}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x \leq -5/2$, $-1 < x \leq 0$ eller $x > 2$.

Svar: $x \leq -5/2$, $-1 < x \leq 0$ eller $x > 2$.

4. Eftersom det finns ett rent imaginärt nollställe så finns det (minst) ett tal $a \in \mathbf{R}$ så att $p(ia) = 0$. Vi ser att

$$\begin{aligned} p(ia) &= 3(ia)^4 - 6(ia)^3 + 19(ia)^2 - 2ia + 6 = 3a^4 + 6ia^3 - 19a^2 - 2ia + 6 \\ &= 3a^4 - 19a^2 + 6 + i(6a^3 - 2a) \end{aligned}$$

så

$$p(ia) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a^4 - 19a^2 + 6 = 0, \\ 6a^3 - 2a = 0. \end{cases}$$

Notera att vi måste veta att $a \in \mathbf{R}$ för att denna uppdelning ska vara möjlig. Vi löser den andra ekvationen genom att faktorisera uttrycket:

$$6a^3 - 2a = 2a(3a^2 - 1)$$

så vi har lösningarna $a = 0$ eller $a = \pm 1/\sqrt{3}$. Genom kontroll i den första ekvationen ser vi att $a = \pm 1/\sqrt{3}$ båda fungerar (oväntat?) medan $a = 0$ ej är en lösning. Detta innebär att $3z^2 + 1$ är en faktor i $p(z)$ eftersom $\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(z + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) = z^2 + \frac{1}{3}$ är det. Vi utför en polynomdivision (Gör denna!) och erhåller

$$p(z) = (3z^2 + 1)(z^2 - 2z + 6).$$

Kvadratkomplettering av den andra faktorn leder till faktoriseringen

$$z^2 - 2z + 6 = (z - 1)^2 + 5 = (z - 1 - i\sqrt{5})(z - 1 + i\sqrt{5}).$$

Därmed finner vi svaret nedan.

Svar: $p(z) = 3\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(z + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(z - 1 - i\sqrt{5}\right)\left(z - 1 + i\sqrt{5}\right)$.

5. Vi börjar med att expandera binomialkoefficienten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!\,(k-1)!} \\ &= -n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} = -n \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} \\ &= -n \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} (-1)^m \, 1^{n-1-m} = -n(-1+1)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

där vi sedan indexerade om summan med $m = k - 1$ och utnyttjade binomialsatsen i sista steget.

Svar: Se ovan.