Lösningsförslag TATB01 2023-09-25 8–12

1. (a) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$f(x) = 3x - 2x^2 - 2 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) = -2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 1\right)$$
$$= \underbrace{-2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2}_{\leq 0} - \frac{7}{8}$$

så maximum inträffar då $x = \dfrac{3}{4}$ och största värdet är $-\dfrac{7}{8}$.

(b) Eftersom

$$\frac{3+i}{2+i} - 1 + i = \frac{(3+i)(2-i)}{4+1} - 1 + i = \frac{7-i}{5} - 1 + i = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i,$$

så blir

$$\left|\frac{3+i}{2+i} - 1 + i\right| = \sqrt{\frac{4+16}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(c) Vi ser att summan är geometrisk med $200 - 3 + 1 = 198$ termer, kvoten $-1/2$ och första term $\dfrac{3}{(-2)^2} = \dfrac{3}{4}$, så

$$\sum_{k=3}^{200} \frac{3}{(-2)^{k-1}} = \frac{3}{4}\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{198}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{198}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2^{-198}\right).$$

Svar: (a) $-\dfrac{7}{8}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (c) $\dfrac{1}{2}\left(1 - 2^{-198}\right)$.

2. **Svar**: (a) $x = \dfrac{\pi}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\dfrac{\pi}{25} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$

(b) $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

(c) $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. Vi formulerar om ekvationen i enlighet med välkända algebraiska regler:

$$3^2(2^{2x} + 2^x) = 2^{3x+2} + 2^2 - 4^{x+1} - 2^{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad 9((2^x)^2 + 2^x) = 4(2^x)^3 + 4 - 4(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x.$$

Låt $t = 2^x$. Då är $t > 0$ och så gäller att ekvationen ekvivalent kan skrivas

$$9(t^2 + t) = 4t^3 + 4 - 4t^2 - 4t \quad \Leftrightarrow \quad 4t^3 - 13t^2 - 13t + 4 = 0.$$

Vi gissar en rot och ser att $t = -1$ uppfyller ekvationen. Polynomdivision visar sedan att

$$4t^3 - 13t^2 - 13t + 4 = (t+1)(4t^2 - 17t + 4) = 4(t+1)\left(t^2 - \frac{17}{4}t + 1\right).$$

Vi finner resterande lösningar till denna ekvation medelst kvadratkomplettering:

$$0 = t^2 - \frac{17}{4}t + 1 = \left(t - \frac{17}{8}\right)^2 - \frac{289}{64} + 1 = \left(t - \frac{17}{8}\right)^2 - \frac{225}{64} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{17}{8} \pm \frac{15}{8}$$

så lösningarna ges av $t = \dfrac{1}{4}$ eller $t = 4$. För $t = \dfrac{1}{4}$ gäller att

$$2^x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

och för $t = 4$ gäller att

$$2^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,$$

eftersom funktionen $x \mapsto 2^x$ är injektiv. Sambandet $2^x = -1$ saknar lösning eftersom 2^x är positiv för alla reella x.

Svar: $x = \pm 2$.

4. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet enligt

$$\sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}\cos 2x = C\sin(2x + \psi),$$

med $C > 0$ och $\psi \in \mathbf{R}$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(2x + \psi) = C\left(\sin 2x \cos\psi + \cos 2x \sin\psi\right) = \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}\cos 2x.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/4$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin\psi &= \sqrt{2}, \\ C\cos\psi &= \sqrt{2}. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4.$$

Alltså är $C = 2$ och vi finner ψ genom att lösa

$$\begin{cases} \cos\psi &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\psi &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \frac{\pi}{4} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Rita en enhetscirkel för att se detta! Vi väljer $\psi = \dfrac{\pi}{4}$.

Därmed kan vi säga att

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}\cos 2x = -\sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \qquad\text{eller} \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså blir

$$2x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{7\pi}{24} + \pi n$$

eller

$$2x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{13\pi}{24} + \pi n.$$

Svar: $x = -\dfrac{7\pi}{24} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{13\pi}{24} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att $t = \dfrac{x-2}{x+1} > 0$ (för att $\ln(t)$ ska vara definierad).

Definitionsmängden blir således

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]2, \infty[.$$

Detta ses enklast genom att göra en ordentlig teckentabell. Tabellen till höger visar att uttrycket är positivt precis då $x < -1$ eller $x > 2$.

		-1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-2}{x+1}$	$+$	☠	$-$	0	$+$

För $x \in D_f$ gäller att

$$y = 2\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \quad\Leftrightarrow\quad e^{y/2} = \frac{x-2}{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)e^{y/2} = x-2$$
$$\Leftrightarrow\quad x(e^{y/2}-1) = -2 - e^{y/2} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{-2-e^{y/2}}{e^{y/2}-1} = \frac{2+e^{y/2}}{1-e^{y/2}}.$$

Eftersom vi finner exakt en lösning för varje y är f injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \frac{2+e^{y/2}}{1-e^{y/2}}.$$

(b) För $x \in \mathbf{R}$ definieras $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ och $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Svar: (a) $D_f =]-\infty, -1[\cup]2, \infty[$; $f^{-1}(y) = \dfrac{2+e^{y/2}}{1-e^{y/2}}$ (b) se ovan.

6. Notera att

$$\tan(2\arctan\sqrt{2}) = \frac{2\tan(\arctan\sqrt{2})}{1-\tan^2(\arctan\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{1-2} = -2\sqrt{2}$$

så

$$\tan\alpha = \frac{-2\sqrt{2} + \tan(\arctan(2\sqrt{2}))}{1 + 2\sqrt{2}\tan(\arctan(2\sqrt{2}))} = \frac{0}{9} = 0.$$

Således måste $\alpha = n\pi$ för något $n \in \mathbf{Z}$. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$\frac{\pi}{2} = 2\arctan 1 < 2\arctan\sqrt{2} < 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{och} \quad \frac{\pi}{4} < \arctan 2\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Här har vi använt att arctan är strängt växande. Alltså gäller

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \alpha < \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

så det följer att $n = 1$ är nödvändigt (den enda möjligheten för att ovanstående olikhet ska gälla). Sålunda blir $\alpha = \pi$.

Svar: π

Alternativt. Låt $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$ och $z_2 = 1 + 2\sqrt{2}i$. Då gäller att

$$z_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}\, e^{i\arctan\sqrt{2}} = \sqrt{3}\, e^{i\arctan\sqrt{2}}$$

och

$$z_2 = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2}\, e^{i \arctan 2\sqrt{2}} = 3\, e^{i \arctan 2\sqrt{2}}.$$

Vi kan därmed räkna ut att

$$z_1^2 z_2 = (1+\sqrt{2}i)^2(1+2\sqrt{2}i) = (2\sqrt{2}i - 1)(1+2\sqrt{2}i) = -9 = 9\, e^{i\pi}.$$

Eftersom produkten i vänsterledet även kan skrivas

$$z_1^2 z_2 = \left(\sqrt{3}\, e^{i \arctan \sqrt{2}}\right)^2 3\, e^{i \arctan 2\sqrt{2}} = 9\, e^{i(2 \arctan \sqrt{2} + \arctan 2\sqrt{2})}$$

så följer det av likhet för komplexa tal på polär form att

$$2 \arctan \sqrt{2} + \arctan 2\sqrt{2} = \pi + 2\pi n$$

för något $n \in \mathbf{Z}$. Uppskattningen i föregående lösning visar att $n = 0$ är den enda möjligheten.

7. Vi söker ett polynom $p(z)$, med reella koefficienter, där 5 olika rötter uppfyller sambandet $|z - i\sqrt{2}| = 1$. En möjlighet är att vi låter

$$p(z) = \left(\left(z - i\sqrt{2}\right)^5 - 1\right) q(z)$$

eftersom $\left(z - i\sqrt{2}\right)^5 = 1$ har 5 olika lösningar på formen $z = i\sqrt{2} + e^{i\theta}$, så $z - i\sqrt{2} = e^{i\theta}$ där högerledet som bekant har beloppet 1. Vi vill nu välja $q(z)$ så att vi får reella koefficienter. För reella z så ser vi att

$$\left(\left(z - i\sqrt{2}\right)^5 - 1\right) \overline{\left(\left(z - i\sqrt{2}\right)^5 - 1\right)} = \left(\left(z - i\sqrt{2}\right)^5 - 1\right)\left(\left(z + i\sqrt{2}\right)^5 - 1\right),$$

så vi testar med $q(z) = \left(z + i\sqrt{2}\right)^5 - 1$:

$$\begin{aligned}\left(\left(z - i\sqrt{2}\right)^5 - 1\right)\left(\left(z + i\sqrt{2}\right)^5 - 1\right) = {} & \left(z - i\sqrt{2}\right)^5 \left(z + i\sqrt{2}\right)^5 \\ & - \left(z - i\sqrt{2}\right)^5 - \left(z + i\sqrt{2}\right)^5 + 1.\end{aligned}$$

Vi ser nu att

$$\begin{aligned}\left(z - i\sqrt{2}\right)^5 \left(z + i\sqrt{2}\right)^5 = \left(z^2 + 2\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} z^{2(5-k)}\, 2^k \\ &= z^{10} + 10\, z^8 + 40\, z^6 + 80\, z^4 + 80\, z^2 + 32,\end{aligned}$$

där vi använde binomialsatsen i näst sista likheten. På liknande sätt erhåller vi att

$$\begin{aligned}\left(z \pm i\sqrt{2}\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} z^{5-k} (\pm i\sqrt{2})^k \\ &= z^5 \pm 5\, iz^4\sqrt{2} - 20\, z^3 \mp 20\, iz^2\sqrt{2} + 20\, z \pm 4\, i\sqrt{2}\end{aligned}$$

så

$$\left(z - i\sqrt{2}\right)^5 + \left(z + i\sqrt{2}\right)^5 = 2\, z^5 - 40\, z^3 + 40\, z.$$

Därmed blir

$$\begin{aligned}p(z) &= z^{10} + 10\, z^8 + 40\, z^6 + 80\, z^4 + 80\, z^2 + 32 - \left(2\, z^5 - 40\, z^3 + 40\, z\right) + 1 \\ &= z^{10} + 10\, z^8 + 40\, z^6 - 2\, z^5 + 80\, z^4 + 40\, z^3 + 80\, z^2 - 40\, z + 33.\end{aligned}$$

Svar: $p(z) = z^{10} + 10\, z^8 + 40\, z^6 - 2\, z^5 + 80\, z^4 + 40\, z^3 + 80\, z^2 - 40\, z + 33$.