Lösningsförslag TATB01 2023-10-28 8–12

1. (a) Beloppen definieras enligt

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & x \geq -3/2, \\ -(2x+3), & x \leq -3/2, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |3-x| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3, \\ 3-x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Intressanta punkter är alltså $x = -3/2$ och $x = 3$. Vi delar upp i tre fall.
Fall 1: $x \leq -3/2$. Då är

$$|2x+3| - |3-x| = 2x-4 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x+3)-(3-x) = 2x-4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 3x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{3},$$

vilket inte uppfyller kravet. Alltså ingen lösning (i detta fall).
Fall 2: $-3/2 \leq x \leq 3$. Då är

$$|2x+3| - |3-x| = 2x-4 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+3)-(3-x) = 2x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

vilket inte uppfyller kravet. Alltså ingen lösning (i detta fall).
Fall 3: $x \geq 3$. Då är

$$|2x+3| - |3-x| = 2x-4 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+3)+(3-x) = 2x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10.$$

Här ser vi att $x = 10$ uppfyller att $x \geq 3$ och därmed är en lösning.

(b) Eftersom

$$\frac{3+i}{2+i} - 1 + i = \frac{(3+i)(2-i)}{4+1} - 1 + i = \frac{7-i}{5} - 1 + i = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i,$$

så blir

$$\operatorname{Re}\left(\frac{3+i}{2+i} - 1 + i\right) = \frac{2}{5}.$$

Svar: (a) $x = 10$ (b) $\frac{2}{5}$

2. Notera att det INTE ska lämnas in några lösningar till denna uppgift. Men för fullständighetens skull finns lösningsförslag för denna uppgift nedan.

(a) Vi ser att

$$2^{x+2} = 3^x \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)\ln 2 = x \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln 2 = x(\ln 3 - \ln 2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$$

eftersom ln är injektiv.

(b) Vi ser direkt ur enhetscirkeln att

$$\sin 3x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = 2x + \frac{\pi}{5} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ \quad \text{eller} \\ \pi - 3x = 2x + \frac{\pi}{5} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

så

$$x = \frac{\pi}{5} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 5x = \pi - \frac{\pi}{5} - 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4\pi}{25} - \frac{2\pi n}{5}.$$

(c) Vi noterar att

$$\cos\left(v+\frac{\pi}{3}\right)=\cos v\cos\frac{\pi}{3}-\sin v\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\sin v\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

och då

$$\cos^2 v=\frac{1}{9}\quad\Leftrightarrow\quad\sin^2 v=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\quad\Leftrightarrow\quad\sin v=\pm\sqrt{\frac{8}{9}}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ser vi att $\sin v=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ eftersom $\pi<v<2\pi$. Således blir

$$\cos\left(v+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}.$$

Svar: (b) $x=\dfrac{2\ln 2}{\ln 3-\ln 2}$ (a) $x=\dfrac{\pi}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $x=\dfrac{4\pi}{25}-\dfrac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$
(c) $\dfrac{1+2\sqrt{6}}{6}$.

3. (a) För att samtliga ingående logaritmer ska vara definierade så måste $x>-3/2$, $x>0$ och $x>-3$, det vill säga $x>0$. För $x>0$ så gäller att

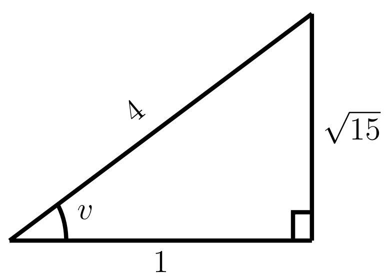
$$\begin{aligned}\ln(2x+3)+\ln x=\ln 2+\ln(3+x)\quad&\Leftrightarrow\quad\ln\big(x(2x+3)\big)=\ln(2(3+x))\\&\Leftrightarrow\quad 2x^2+3x=6+2x\\&\Leftrightarrow\quad 0=x^2+\frac{1}{2}x-3=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{48}{16}\\&\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{4}\pm\frac{7}{4}\quad\Leftrightarrow\quad x=-2\quad\text{eller}\quad x=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

eftersom ln är injektiv. Endast $x=\dfrac{3}{2}$ uppfyller ekvationen.

(b) Låt $v=\pi-\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

Då gäller att $0<v<\pi/2$ och $\cos v=\dfrac{1}{4}$, så vi ser i en hjälptriangel att $\sin v=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ så

$$\begin{aligned}\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)&=\sin(\pi-v)\\&=\sin v=\frac{\sqrt{15}}{4}.\end{aligned}$$



Svar: (a) $x=\dfrac{3}{2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

4. Enligt kända trigonometriska formler så ser vi att

$$4\sin^2 3x\cos 4x=4\left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)\cos 4x=2\cos 4x-2\cos 6x\cos 4x.$$

En Euler-omskrivning visar sedan att

$$
\begin{aligned}
2\cos 6x \cos 4x &= 2\left(\frac{e^{i6x}+e^{-i6x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i10x}+e^{i2x}+e^{-i2x}+e^{-i10x}\right) \\
&= \cos 10x + \cos 2x,
\end{aligned}
$$

så ekvationen given i uppgiften kan ekvivalent skrivas om enligt

$$
\begin{aligned}
4\sin^2 3x \cos 4x = 2\cos 4x - 2\cos 2x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos 4x - \cos 10x - \cos 2x = 2\cos 4x - 2\cos 2x \\
&\Leftrightarrow \quad \cos 10x = \cos 2x \\
&\Leftrightarrow \quad 10x = \pm 2x + 2\pi n
\end{aligned}
$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna ges av

$$
8x = 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi n}{4} \quad \text{eller} \quad 12x = 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi n}{6},
$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Eftersom $|i-1| = \sqrt{1+(-1)^2} = \sqrt{2}$ så ser vi att

$$
8i - 8 = 8(i-1) = 8\sqrt{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4},
$$

där vi enklast ser omskrivningen till polär form genom att rita en enhetscirkel (rita en ordentlig figur!). Ekvationen i uppgiften kan således skrivas

$$
(z-1)^5 = 8\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}.
$$

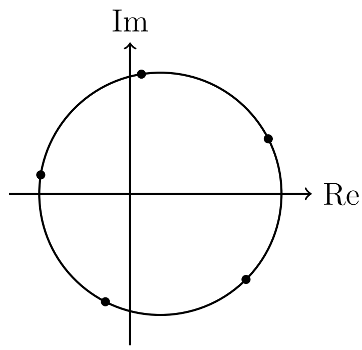
Låt nu $z - 1 = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$
(z-1)^5 = r^5 e^{i5\varphi} = 8\sqrt{2}\, e^{i4\pi/3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^5 = 8\sqrt{2} = 2^{7/2}, \ r \geq 0, \\ 5\varphi = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}
$$

Detta visar att $r = (2^{7/2})^{1/5} = 2^{7/10}$ och $\varphi = \dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$
z = 1 + 2^{7/10}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.
$$



Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 5$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Svar: $z = 1 + 2^{7/10}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

6. (a) Största möjliga definitionsmängd hittar vi genom att betrakta när logaritmen är definierad, dvs då

$$
\frac{x^2 - 4}{4x^2 - 1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(2x-1)} > 0
$$

där vi utnyttjat konjugatregeln i både täljare och nämnare. Vi gör en teckentabell.

		-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(2x-1)}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $x < -2$, $-1/2 < x < 1/2$ eller då $x > 2$. Vi har med andra ord tre olika typer av naturliga intervall att välja på om vi vill ha en sammanhängande definitionsmängd på formen $]a, b[$. På grund av symmetrin kring $x = 0$ så misstänker vi att f inte är injektiv på $-1/2 < x < 1/2$. Till exempel så ser vi att

$$f\left(\pm\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{\left(\pm\frac{1}{4}\right)^2 - 4}{4\left(\pm\frac{1}{4}\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{16} - 4}{\frac{1}{4} - 1}\right) = \ln\left(\frac{63}{12}\right)$$

så f är inte injektiv om $D_f = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

(b) Med till exempel $D_f = \left]0, \frac{1}{2}\right[$ och $x \in D_f$ så gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\frac{x^2-4}{4x^2-1}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{x^2-4}{4x^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad (4x^2-1)e^y = x^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2\left(4e^y - 1\right) = e^y - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{e^y-4}{4e^y-1} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{e^y-4}{4e^y-1}} \end{aligned}$$

där endast

$$x = \sqrt{\frac{e^y-4}{4e^y-1}}$$

är en möjlig lösning eftersom $x \in D_f$ (så $x > 0$). Eftersom vi endast hittar ett alternativ så är f injektiv på D_f och ett uttryck för inversen ges i detta fall av

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{e^y-4}{4e^y-1}}.$$

Svar: (a) $D_f = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ (b) T.ex. $D_f = \left]0, \frac{1}{2}\right[$; $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{e^y-4}{4e^y-1}}$.

7. Vi noterar först att $\sin x \neq a$ är nödvändigt för att kunna hitta en lösning, så antag att $\sin x \neq a$, Då gäller att

$$\frac{4a\sin x - 1}{\sin x - a} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4a\sin x - 1 = 4(\sin x - a) \quad \Leftrightarrow \quad 4(a-1)\sin x = 1 - 4a.$$

Om $a = 1$ så saknas lösning ty om $x \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ så gäller att

$$\frac{4\cdot\sin x - 1}{\sin x - 1} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sin x - 1 = 4\sin x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 0,$$

vilket givetvis är falskt.

Om $a \neq 1$ gäller att

$$4(a-1)\sin x = 1-4a \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1-4a}{4(a-1)}$$

och för att lösningar ska existera så måste

$$-1 \leq \frac{1-4a}{4(a-1)} \leq 1.$$

Vi löser dessa olikheter:

$$-1 \leq \frac{1-4a}{4(a-1)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1-4a}{4(a-1)} + 1 = \frac{1-4a+4(a-1)}{4(a-1)} = \frac{-3}{4(a-1)} \quad \Leftrightarrow \quad a < 1$$

och

$$\begin{aligned} \frac{1-4a}{4(a-1)} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \geq \frac{1-4a}{4(a-1)} - 1 = \frac{1-4a-4(a-1)}{4(a-1)} = \frac{5-8a}{4(a-1)} \\ &\Leftrightarrow \quad a \leq \frac{5}{8} \quad \text{eller} \quad a > 1, \end{aligned}$$

vilket vi enklast ser genom att göra en teckentabell (gör det!). Således existerar inga lösningar om $a > \frac{5}{8}$. Om $a \leq \frac{5}{8}$ återstår kravet att $\sin x \neq a$, så vi undersöker när detta sker:

$$a = \sin x = \frac{1-4a}{4(a-1)} \quad \Leftrightarrow \quad 4a(a-1) = 1-4a \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{1}{2}$$

där vi behåller ekvivalens eftersom $a \neq 1$ i första ekvivalensen. Därmed finner vi att för $a \leq \frac{5}{8}$ och $a \neq \pm\frac{1}{2}$, så är

$$\sin x = \frac{1-4a}{4(a-1)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1-4a}{4(a-1)}\right) + 2n\pi, \ n \in \mathbf{Z}, \\ \qquad \text{eller} \\ \pi - \arcsin\left(\frac{1-4a}{4(a-1)}\right) + 2n\pi, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Svar: För $a > \frac{5}{8}$ eller $a = \pm\frac{1}{2}$ saknas lösningar. För $a \leq \frac{5}{8}$ och $a \neq \pm\frac{1}{2}$ finns lösningarna

$$x = \arcsin\left(\frac{1-4a}{4(a-1)}\right) + 2n\pi, \ n \in \mathbf{Z}, \ \text{eller} \ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-4a}{4(a-1)}\right) + 2n\pi, \ n \in \mathbf{Z}.$$