Lösningsförslag matematisk grundkurs 2023-08-15

1. (a) Summan är en geometrisk summa med $50-5+1=46$ termer, kvoten -2 och första term $3\cdot(-2)^5=-3\cdot 2^5$, så

$$\sum_{k=5}^{50} 3\cdot(-2)^k = -3\cdot 2^5\cdot\frac{(-2)^{46}-1}{-2-1} = 2^5\cdot\left(2^{46}-1\right) = 2^{51}-32.$$

   (b) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{2}{x}\geq\frac{2x+5}{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq\frac{2}{x}-\frac{2x+5}{x+1}=\frac{-2x^2-3x+2}{x(x+1)}.$$

Vi undersöker när täljaren blir noll och ser att

$$-2x^2-3x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16} \quad\Leftrightarrow\quad x=-2 \text{ eller } x=1/2,$$

så vi kan faktorisera täljaren enligt $-2x^2-3x+2=-2(x+2)(x-\frac{1}{2})$. Alltså vill vi lösa olikheten

$$0\leq -2\cdot\frac{(x+2)(x-1/2)}{x(x+1)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x+2)(x-1/2)}{x(x+1)}\leq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

		-2		-1		0		$1/2$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1/2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+2)(x-1/2)}{x(x+1)}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt då $-2\leq x<-1$ eller $0<x\leq 1/2$.

Svar: (a) $2^{51}-32$ (b) $-2\leq x<-1$ eller $0<x\leq 1/2$.

2. (a) Enligt regler för den naturliga logaritmen finner vi att

$$\frac{\sqrt{e^{-\ln 3}}\ln\sqrt{e^3}}{e^{\frac{1}{2}\ln 3}} = \frac{\sqrt{e^{\ln 3^{-1}}}\frac{1}{2}\ln e^3}{e^{\ln 3^{1/2}}} = \frac{\sqrt{3^{-1}}\frac{3}{2}}{3^{1/2}} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Vi förenklar och förlänger med e^x:

$$\begin{aligned} e^x+e^{\ln 2}=e^{4\ln 2-x} \quad&\Leftrightarrow\quad e^x+2=e^{\ln 16-x}=16e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad e^{2x}+2e^x=16 \\ &\Leftrightarrow\quad (e^x+1)^2=17 \quad\Leftrightarrow\quad e^x=-1\pm\sqrt{17} \\ &\Leftrightarrow\quad x=\ln\left(-1+\sqrt{17}\right) \end{aligned}$$

eftersom $e^x>0$ och exp är injektiv.

Svar: (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\ln\left(\sqrt{17}-1\right)$.

3. **Svar**: (a) $x = \dfrac{11\pi}{30} - \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{2\pi}{15} + \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. (b) $\dfrac{6}{\sqrt{37}}$ (c) $\dfrac{8\pi}{9}$.

4. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet enligt

$$\sqrt{3}\cos x - 3\sin x = C\sin(x+\psi),$$

med $C > 0$ och $\psi \in \mathbf{R}$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(x+\psi) = C\left(\sin x\cos\psi + \cos x\sin\psi\right) = -3\sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/2$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin\psi &= \sqrt{3}, \\ C\cos\psi &= -3. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = (\sqrt{3})^2 + (-3)^2 = 12.$$

Alltså blir $C = \sqrt{12}$ och vi finner ψ genom att lösa

$$\begin{cases} \cos\psi &= -\dfrac{3}{\sqrt{12}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\psi &= \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Rita en enhetscirkel för att se detta! Vi väljer $\psi = \dfrac{5\pi}{6}$.

Därmed kan vi säga att

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos x - 3\sin x = \sqrt{6} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{12}\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \text{eller} \\ x + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså blir

$$x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n.$$

Svar: $x = -\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\dfrac{7\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. För att $f(x)$ ska vara definierad måste $\ln x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1$ (så $x > 0$ är också uppfyllt). Dessutom får inte nämnaren bli noll, vilket sker precis då

$$\sqrt{\ln x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$$

Med andra ord blir $D_f = [1, \infty[\setminus \{e\} = [1, e[\cup]e, \infty[$.

Om $x \in D_f$ så gäller att

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\sqrt{\ln x}+1}{\sqrt{\ln x}-1} \quad \Leftrightarrow \quad y(\sqrt{\ln x}-1) = \sqrt{\ln x}+1$$
$$\Leftrightarrow \quad (y-1)\sqrt{\ln x} = y+1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\ln x} = \frac{y+1}{y-1} \quad \Rightarrow \quad \ln x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x = \exp\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$$

Notera särskilt implikationen ovan! Vill vi skriva ekvivalens måste vi lägga till villkoret att $(y+1)/(y-1) \geq 0$ Men eftersom vi finner högst en lösning för varje y, så innebär detta att f är injektiv samt att ett uttryck för inversen därmed ges av $f^{-1}(y) = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$.

Svar: $D_f = [1,\infty[\setminus\{e\} = [1,e[\cup]e,\infty[$; $f^{-1}(y) = \exp\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$.

6. (a) Enligt definitionen av e^{ix} för $x \in \mathbf{R}$ så gäller att

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}}{e^{iy}} &= \frac{\cos x + i\sin x}{\cos y + i\sin y} = \frac{(\cos x + i\sin x)(\cos y - i\sin y)}{(\cos y + i\sin y)(\cos y - i\sin y)} \\ &= \frac{\cos x\cos y + \sin x\sin y + i(\sin x\cos y - \cos x\sin y)}{\cos y\cos y + \sin y\sin y} \\ &= \cos(x-y) + i\sin(x-y) = e^{i(x-y)},\end{aligned}$$

vilket skulle visas. Vi använde additionsformlerna för cos och sin i näst sista likheten.

(b) Eftersom $|i+\sqrt{3}| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ så ser vi att

$$\left(i+\sqrt{3}\right)^8 = 2^8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^8 = 2^8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^8 = 2^8\left(e^{i\pi/6}\right)^8 = 2^8\, e^{i4\pi/3},$$

där vi enklast ser omskrivningen till polär form genom att rita en enhetscirkel (rita en ordentlig figur!). Ekvationen i uppgiften kan således skrivas

$$z^8 + (i+\sqrt{3})^8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^8 = -2^8\, e^{i4\pi/3} = 2^8 e^{i\pi} e^{i4\pi/3} = 2^8\, e^{i7\pi/3} = 2^8\, e^{i\pi/3}.$$

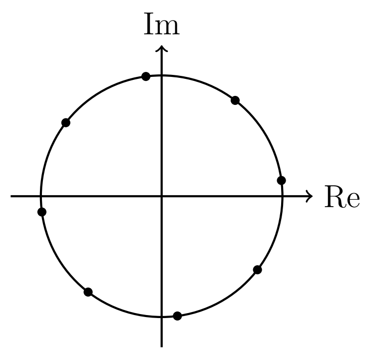
Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^8 = r^8 e^{i8\varphi} = 2^8 e^{i\pi/3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^8 = 2^8,\ r \geq 0, \\ 8\varphi = \pi/3 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = 2$ och $\varphi = \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}\right)}, \quad n = 0,1,2,3,4,5,6,7.$$



Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 8$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Svar: (a) se ovan (b) $z = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}\right)}$, $n = 0,1,2,3,4,5,6,7$.

7. Antag att $\bar{a}z \neq 1$. Om $\bar{a}z = 1$ så är $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$ odefinierad och $|z| > 1$. Enligt sambandet $|w|^2 = w\bar{w}$, $w \in \mathbf{C}$, finner vi att

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(z-a)(\overline{z-a})}{(1-\bar{a}z)(\overline{1-\bar{a}z})} = \frac{|z|^2-(z\bar{a}+a\bar{z})+|a|^2}{1-(a\bar{z}+\bar{a}z)+|a|^2|z|^2}$$

så då både täljare och nämnare i det sista bråket är positiva gäller att

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |z|^2-(z\bar{a}+a\bar{z})+|a|^2 < 1-(a\bar{z}+\bar{a}z)+|a|^2|z|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2+|a|^2 < 1+|a|^2|z|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2\left(1-|a|^2\right) < 1-|a|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2 < \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2} = 1\end{aligned}$$

eftersom $|a| < 1$. Således har vi visat att

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1.$$

Svar: se ovan.