# Lösningsförslag matematisk grundkurs 2024-01-05

1. (a) Cirkelns ekvation ges av

$$\begin{aligned} x^2+y^2+4x=6y-8 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+4x+y^2-6y+8=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+2)^2-4+(y-3)^2-9+8=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+2)^2+(y-3)^2=5, \end{aligned}$$

så medelpunkten blir $(-2,3)$ och radien $\sqrt{5}$.

(b) Eftersom

$$\frac{3+i}{2+i}-1+i=\frac{(3+i)(2-i)}{4+1}-1+i=\frac{7-i}{5}-1+i=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i,$$

så blir

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3+i}{2+i}-1+i\right)=\frac{4}{5}.$$

Observera att det **inte** är något $i$ med i svaret!

(c) Summan är aritmetisk och har $n-11+1=n-10$ termer (vi förutsätter alltså att $n \geq 10$). Den första termen ser vi är $11-1/2$ och sista termen är $n-1/2$, så

$$\sum_{k=11}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)=\frac{11-1/2+n-1/2}{2}\cdot(n-10)=\frac{(10+n)(n-10)}{2}.$$

För att summan ska bli $\geq 4000$ så måste alltså

$$(10+n)(n-10) \geq 8000 \quad \Leftrightarrow \quad n^2-100 \geq 8000 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \geq 8100 \quad \Leftrightarrow \quad |n| \geq 90.$$

Eftersom $n \geq 10$ så följer det att endast $n \geq 90$ är möjligt och det minsta heltalet $n$ blir därför $n=90$.

**Svar**: (a) medelpunkt: $(-2,3)$; radie: $\sqrt{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $n=90$.

2. (a) För att samtliga logaritmer ska vara definierade så måste $x>0$ och $x>1/2$, det vill säga $x>1/2$. För $x>1/2$ så gäller att

$$\begin{aligned} \ln(x^2+5)-\ln x+\ln 3=\ln(4x-2) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\big(3(x^2+5)\big)=\ln(x(4x-2)) \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2+15=4x^2-2x \\ &\Leftrightarrow \quad 0=x^2-2x-15=(x-1)^2-16 \\ &\Leftrightarrow \quad x=1\pm 4 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3 \quad \text{eller} \quad x=5 \end{aligned}$$

eftersom ln är injektiv. Endast $x=5$ uppfyller ekvationen.

(b) Vi stuvar om i ekvationen och finner att

$$\begin{aligned} 1+\ln(e^{-2}+e^{-x})=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(e^{-2}+e^{-x})=-1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2}+e^{-x}=e^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-x}=e^{-1}-e^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad -x=\ln(e^{-1}-e^{-2}) \\ &\Leftrightarrow \quad x=-\ln(e^{-1}-e^{-2})=2-\ln(e-1) \end{aligned}$$

eftersom $e^{-1}>e^{-2}$ och ln är injektiv.

**Svar**: (a) 5 (b) $2-\ln(e-1)$.

3. **Svar**: (a) $x = -\dfrac{\pi}{35} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\dfrac{2\pi}{35} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. (b) $\dfrac{\pi}{5}$ (c) $-\dfrac{23}{25}$ .

4. För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att $t = \dfrac{x-3}{2x+1} > 0$ (för att $\ln t$ ska vara definierad).

   Definitionsmängden blir således

$$D_f = \left]-\infty,\, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]3,\, \infty\right[.$$

   Detta ses enklast genom att göra en ordentlig teckentabell. Tabellen till höger visar att uttrycket är positivt precis då $x < -1/2$ eller $x > 3$.

| | | $-1/2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\dfrac{x-3}{2x+1}$ | $+$ | ☠ | $-$ | $0$ | $+$ |

   För $x \in D_f$ gäller att

$$y = \ln\left(\frac{x-3}{2x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{x-3}{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)e^y = x-3$$
$$\Leftrightarrow \quad x(2e^y - 1) = -3 - e^y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3-e^y}{2e^y-1} = \frac{3+e^y}{1-2e^y}.$$

   Eftersom vi finner exakt en lösning för varje $y$ är $f$ injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \frac{3+e^y}{1-2e^y}.$$

   **Svar**: $D_f = \left]-\infty,\, -\dfrac{1}{2}\right[ \cup ]3,\, \infty[$; $f^{-1}(y) = \dfrac{3+e^y}{1-2e^y}$.

5. Två Euler-omskrivningar visar att

$$\begin{aligned} 2\sin 2x\cos x &= 2\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i3x}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-i3x}\right) \\ &= \sin 3x + \sin x \end{aligned}$$

   och

$$\begin{aligned} \sin x\cos 4x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}\right) = \frac{1}{4i}\left(e^{i5x}+e^{-i3x}-e^{i3x}-e^{-i5x}\right) \\ &= \frac{\sin 5x - \sin 3x}{2}, \end{aligned}$$

   så

$$2\sin 2x\cos x + \sin x\cos 4x = \sin 3x + \sin x + \frac{\sin 5x - \sin 3x}{2} = \sin x + \frac{\sin 5x + \sin 3x}{2}.$$

   Vänsterledet givet i uppgiften kan därmed ekvivalent skrivas om enligt

$$1 + 8\sin 2x\cos x + 4\sin x\cos 4x = 1 + 2\sin 3x + 4\sin x + 2\sin 5x.$$

Ekvationen kan därför ekvivalent formuleras som

$$1 + 2\sin 3x + 4\sin x + 2\sin 5x = 4\sin x + 2\sin 3x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 5x = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ eller } 5x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna ges av

$$5x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5} \quad \text{eller} \quad 5x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{5},$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

**Svar**: $2\sin 2x \cos x + \sin x \cos 4x = \sin x + \dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{2}$;
$x = -\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Eftersom $|-2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$ så ser vi att

$$-2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i2\pi/3},$$

där vi enklast ser omskrivningen till polär form genom att rita en enhetscirkel (rita en ordentlig figur!). Ekvationen i uppgiften kan således skrivas

$$9z^4 = 4\,e^{i2\pi/3} \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = \frac{4}{9}\,e^{i2\pi/3}.$$

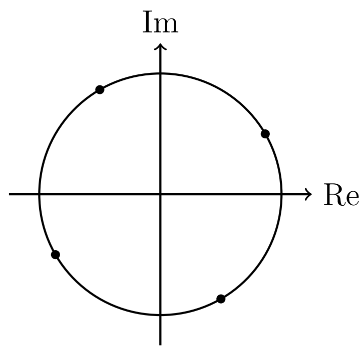
Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^4 = r^4 e^{i4\varphi} = \frac{4}{9} e^{i2\pi/3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^4 = \frac{4}{9}, \ r \geq 0, \\ 4\varphi = 2\pi/3 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = \sqrt{2/3}$ och $\varphi = \pi/6 + \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$




Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 4$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Vi skriver om lösningarna till rektangulär form:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{\sqrt{6}},\\
z_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{i2\pi/3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
z_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{i7\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{1}{\sqrt{6}},\\
z_3 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{i5\pi/3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

**Svar**: $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{\sqrt{6}}$, $-\frac{1}{\sqrt{6}}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{1}{\sqrt{6}}$ och $\frac{1}{\sqrt{6}}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

*Anmärkning.* Notera att $z_3 = iz_2 = i^2z_1 = i^3z_0$. Addition av $\pi/2$ till argumentet för ett komplext tal motsvarar multiplikation med $i$ (vi roterar alltså det komplexa talet $z_0$ med $\pi/2$-radianer i taget för att få samtliga fyra lösningar).

7. Vi noterar först att $D_f = ]-\infty, 0[\cup]1, 3[$. Vi reder ut vad $D_g$ är: för att $x \in D_g$ så måste $x \in D_f$ **och** $f(x) \in D_f$. Eftersom $x < 0$ medför att $0 < f(x) < 1$ så kan inte $D_g$ innehålla negativa $x$. För $1 < x < 3$ så ser vi att $f(x) > 0$ och att

$$1 < f(x) < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x^2 - 1 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < x^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} < x < 2$$

eftersom $x > 0$. Därmed finner vi att $D_g = ]\sqrt{2},\ 2[$. För $x \in D_g$ gäller att

$$
\begin{aligned}
y = f(f(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad y = f(x^2-1) = (x^2-1)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-1)^2 = y+1\\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \pm \sqrt{y+1}
\end{aligned}
$$

där endast $x^2 = 1 + \sqrt{y+1}$ är möjlig då $x^2 \geq 0$. Således finner vi att

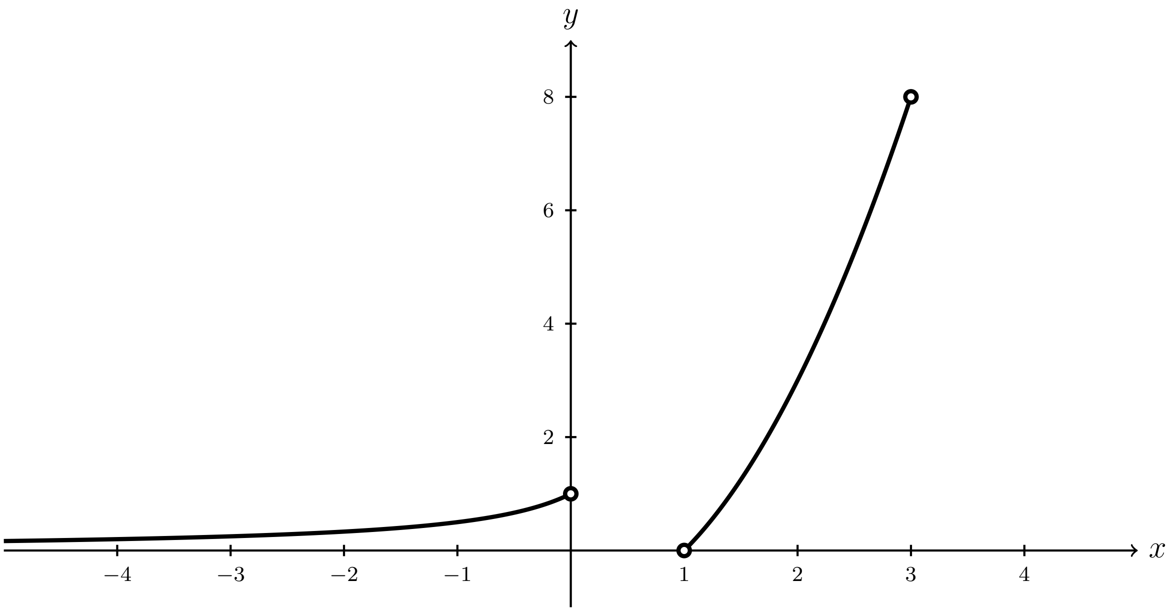
$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{y+1}}$$

och den enda möjligheten är $x = \sqrt{1+\sqrt{y+1}}$ eftersom $x \in D_g$. Vi finner endast ett alternativ så $g$ är injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$g^{-1}(y) = \sqrt{1+\sqrt{y+1}}.$$

**Svar**: $D_g = ]\sqrt{2},\ 2[$; $g^{-1}(y) = \sqrt{1+\sqrt{y+1}}$.

Om vi skissar grafen till $f$ finner vi följande.




Ur grafen ser vi att $V_f = ]0, 8[$ och att $f$ inte är injektiv. Men det betyder alltså inte att $g$ inte kan vara injektiv.