Problem för envar

Övningssamling i envariabelanalys
nedtecknad vid
Matematiska institutionen

2023

Problem

1 Reella och komplexa tal

P 1.1 Förenkla (a) $a^2 + b - c$ där $c = 1 - a + 2b$
(b) $3x^2 - 2x + 1 - y$ där $y = 5x - 7 - z$ och $z = -2 + x^2$

P 1.2 Skriv bråken $\dfrac{\frac{12}{13}}{8}$ och $\dfrac{12}{\frac{13}{8}}$ i enklast möjliga form.

P 1.3 Ange den minsta gemensamma nämnaren till följande bråk. Beräkna sedan summan av dem.
(a) $\dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{28}, \dfrac{1}{21}$ (b) $\dfrac{x+1}{x^2+1}, \dfrac{2x+4}{x^2-1}, \dfrac{-3}{x-1}$.

P 1.4 Skriv uttrycket $-\dfrac{1}{x-2y} + \dfrac{x-y}{x^2-4xy+4y^2} - \dfrac{y}{(x-2y)^2}$ på så enkel form som möjligt.

P 1.5 Utveckla $(a - 2b + 3c)^2$ till en summa av produkter.

P 1.6 Dela upp följande uttryck i faktorer så långt det går: (a) $x^3 - x$ (b) $3x^5y^2 - 48xy^{10}$.

P 1.7 Bevisa formlerna

$$x^p x^q = x^{p+q}, \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q} \quad \text{och} \quad x^p y^p = (xy)^p$$

för alla reella tal $x > 0$, $y > 0$ och alla heltal p och q.

P 1.8 Kvadratkomplettera uttrycken (a) $x^2 + 5x + 7$ (b) $3 + 6x - 2x^2$.
Ange också (om möjligt) största och minsta värde för dessa uttryck samt för vilka x dessa värden antas.

P 1.9 Lös ekvationen $\dfrac{ax-1}{x-b} = 2$ för alla värden på de reella konstanterna a och b.

P 1.10 Bestäm alla lösningar x till (a) $x^2 - 1 = (x+1)^2$ (b) $x^3 = 2x^2 - x$.

P 1.11 Bestäm alla lösningar x till $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+a}$ för alla reella värden på konstanten a.

P 1.12 Bestäm alla lösningar till $\dfrac{1}{2x+2} + \dfrac{5}{4x+3} = 1$.

P 1.13 För vilka reella konstanter a har ekvationen $x^2 + 9x + a = 0$ två olika reella lösningar?

P 1.14 Bestäm alla lösningar till (a) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ (b) $abx^2 + ab = a^2x + b^2x$
för alla olika reella värden på konstanterna a och b.

P 1.15 30 studenter läste en kurs där det krävdes godkänt på två deltentamina för att få godkänt på hela kursen. 25 klarade tentamen I, 18 tentamen II och 3 ingen tentamen. Hur många var godkända på kursen efter dessa tentamina?

P 1.16 Undersök om punkterna P_1, P_2 och P_3 alla ligger på samma räta linje då
(a) $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (5,-5)$ och $P_3 = (-5,10)$
(b) $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (10,11)$ och $P_3 = (20,21)$.

P 1.17 Vad betyder ekvationen $x^2 + y^2 = 4x$?

P 1.18 Visa att

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

är en ekvation för en cirkel om och endast om $a^2 + b^2 > 4c$. Bestäm cirkelns medelpunkt och radie i så fall. Vad betyder ekvationen om $a^2 + b^2 = 4c$? Om $a^2 + b^2 < 4c$?

P 1.19 Bestäm alla reella x som uppfyller

(a) $\sqrt{2x+6} = 1 - x$ (b) $x + \sqrt{1-4x} = 1$ (c) $\sqrt{5-8x} + 2 = 2x$

P 1.20 Bestäm alla lösningar till

(a) $\sqrt{x^2+6x+9} = 2x+2$ (b) $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-1} = 1$ (c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{9x+9} = 2x+2$.

P 1.21 Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer:

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \sqrt{2x}$ (b) $x^2 + 6x + \sqrt{x^2+6x+8} = 64$.

P 1.22 För vilka reella tal x är uttrycket $\sqrt{1 - \sqrt{2-x}}$ definierat (som ett reellt tal)?

P 1.23 Dividera (a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (b) $\dfrac{x^4-1}{x-1}$ (c) $\dfrac{-3x+5}{x^2-7}$ (d) $\dfrac{x^4+2x^3+25}{x^2+4x+5}$.

P 1.24 Använd polynomdivision för att skriva om följande uttryck på en form där man tydligt kan läsa av kvot och rest:

(a) $\dfrac{x^3+x^2-17x+8}{x-3}$ (b) $\dfrac{x^3-8x^2+13x}{x^2-3x+1}$.

P 1.25 Bestäm resten då polynomet $x^{100} + x^{67} - x^{32} - 2x^9 + 1$ divideras med
(a) $x-1$ (b) $x+2$ (c) x^2-x.

P 1.26 Dela upp följande polynom fullständigt som produkter av förstagradspolynom:

(a) $x^2 + 2x - 63$ (b) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$.

P 1.27 Är $x = 6$ lösning till (a) $x^3 - 5x^2 - 12x + 36 = 0$ (b) $x^3 - 4x^2 - 17x + 36 = 0$?

P 1.28 Bestäm alla lösningar till

(a) $x^3 - 7x + 6 = 0$ (b) $2x^3 - 5x^2 + 4 = 0$
(c) $x^3 - 8 = 19(x-2)$ (d) $x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 10 = 0$.

P 1.29 Visa följande samband mellan rötterna $x = \alpha_1$ och $x = \alpha_2$ till en andragradsekvation $x^2 + ax + b = 0$ och ekvationens koefficienter a och b:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -a \quad \text{och} \quad \alpha_1\alpha_2 = b$$

(med $\alpha_2 = \alpha_1$ om α_1 är en dubbelrot).

P 1.30 Härled ett samband mellan rötterna $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ och $x = \alpha_3$ till en tredjegradsekvation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ och ekvationens koefficienter a, b och c.

P 1.31 Lös följande ekvationer: (a) $(x-3)^3 - (2x+1)^3 = 0$ (b) $\dfrac{4x-3}{x^3-1} + \dfrac{3x-4}{x^2-1} = \dfrac{3}{x}$

P 1.32 Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} (x-y)(2x+3y) &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1. \end{cases}$

P 1.33 För vilka x gäller följande olikheter?

(a) $2x - 3 < 0$ (b) $x + 3 > 2x - 1$ (c) $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$
(d) $x^2 < 3$ (e) $x^2 \geq 5$ (f) $(x-2)^2 \leq 1$

P 1.34 Bestäm det minsta värde som $x^2 - 3x + 1$ kan ha för reella tal x.
(Ledning: Kvadratkomplettering).

P **1.35** Visa att (a) $x(x-2) \geq -1$ för alla reella tal x (b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$ för alla $x > 0$ och $y > 0$.

När gäller likhet i (a) resp (b)?

P **1.36** Bestäm det största möjliga värde som produkten av två reella tal x och y kan ha då deras summa är 10.

P **1.37** Bestäm ett andragradspolynom som har

(a) minsta värdet 1 i $x = 1$ (b) största värdet 3 i $x = -2$.

P **1.38** För vilka x gäller följande olikheter?

(a) $x^2 - 10x + 25 > 0$ (b) $2x^4 + 6x > x^3 + 7x^2$ (c) $x^2 \geq \dfrac{3x+2}{x}$

(d) $x^3 \geq 3x + 2$ (e) $x \geq 2(x-2)$ (f) $\dfrac{x+1}{x} < 2$

P **1.39** För vilka reella tal x gäller olikheterna

(a) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{1-x}$ (b) $\dfrac{x-1}{x+3} \leq \dfrac{x+2}{2x+1}$ (c) $\dfrac{x}{x+4} + \dfrac{x}{x+1} \geq 1$ (d) $\dfrac{1+2x-3x^2}{2x^2-5x+2} \geq 0$?

P **1.40** Bestäm de reella konstanterna a och b så att olikheten $\dfrac{x-a}{x-b} \geq 0$ har lösningsmängden

(a) $]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$ (b) $]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$ (c) $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ (d) $]-\infty, +\infty[$.

P **1.41** (a) Bestäm ett tal ω sådant att $x > \omega \Rightarrow 1/x^2 < 1/100$. Är ω entydigt bestämt?

(b) Bestäm för varje tal $\epsilon > 0$ ett tal ω (som får bero på ϵ) sådant att $x > \omega \Rightarrow 1/x^2 < \epsilon$.

P **1.42** För vilka reella tal x gäller olikheten $\sqrt{1-8x^2} \geq 1 - 4x$?

P **1.43** Räkna ut

(a) $\left|(-3)^2 + (-2)^3\right|$ (b) $\left|(-3)^2\right| + \left|(-2)^3\right|$ (c) $\left|3^{-2} - 2^{-3}\right|$ (d) $\left|\dfrac{(-3)^4}{(-4)^3}\right|$ (e) $\dfrac{\left|(-3)^4\right|}{\left|(-4)^3\right|}$

P **1.44** Bestäm alla reella x som uppfyller

(a) $2|x+1| - |x-1| = 2$ (b) $|x+2| + |3-4x| = 6x - 5$ (c) $|x+1| + |2x-3| - |x-3| = 5$.

P **1.45** Bestäm alla lösningar till följande ekvationer: (a) $\left|\dfrac{x-1}{2x+3}\right| = 2$ (b) $\left|x^2 - 1\right| = |2x+1|$.

P **1.46** För vilka x gäller följande olikheter?

(a) $0 < |x-1| < 3$ (b) $\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right| \geq 1$ (c) $\left|x^2 - 4\right| < 2$ (d) $\dfrac{|x-1|}{|x|-1} \geq 1$

P **1.47** Visa att $|x-2| < 3 \implies |x+1| < 6$.

P **1.48** Visa att för reella tal x och y gäller att

(a) $x^2 + y^2 \leq 1 \implies |x| \leq 1$ och $|y| \leq 1$ (b) $x^2 + y^2 \leq 1 \implies \left|x^3 + y^3\right| \leq 1$

P **1.49** Lös följande ekvationer: (a) $|x|\,(x+4) = 3$ (b) $|x+a| = x$ för varje reellt tal a

P **1.50** Bestäm konstanten c så att $x = 0$ är en lösning till ekvationen

$$|1 - 4x^2| = 3 - c\,|x-1|.$$

Bestäm därefter alla reella lösningar till ekvationen, för detta värde på c.

P **1.51** Räkna ut summorna (a) $\displaystyle\sum_{j=2}^{5} j\,2^j$ (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} 1$

P 1.52 Skriv med summatecken

(a) $1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343$ (b) $\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}$

(c) s_n, om $s_0 = 0$ och $s_n = s_{n-1} + n^2$ för $n = 1, 2, \ldots$.

P 1.53 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{101} \frac{1}{k}$.

P 1.54 Räkna ut (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} (3j+1)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (n-k)$

P 1.55 Räkna ut (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{100} (-1)^k 2^k$

P 1.56 Hur stort måste heltalet $n > 0$ vara för att följande olikhet ska gälla?

$$1 + 1{,}1 + (1{,}1)^2 + (1{,}1)^3 + \cdots + (1{,}1)^n > 100$$

P 1.57 Visa att

(a) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) $x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots - x + 1)$ för $n = 1, 3, 5, \ldots$

P 1.58 I en geometrisk summa med reella termer är summan av de två första termerna 16 och summan av de fyra följande 5. Bestäm första termen och kvoten i summan.

P 1.59 Skriv ut faktorerna i följande produkter. Räkna också ut produkterna (b) och (c).

(a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} 2k$ (b) $\displaystyle\prod_{j=0}^{100} 2^{-j}$ (c) $\displaystyle\prod_{m=1}^{n} \frac{m+1}{m}$

P 1.60 Skriv $2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot \ldots \cdot (-19)$ med produkttecken.

P 1.61 Räkna ut $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ och $\binom{5}{4}$.

P 1.62 Skriv på enklaste form (a) $\binom{21}{19}$ (b) $\binom{13}{9}$ (c) $\binom{n+1}{n-2}$.

P 1.63 Bevisa att $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ för alla heltal n och k sådana att $1 \leq k \leq n-1$.

P 1.64 Utveckla (a) $(a+b)^5$ (b) $(2x - 3y)^4$ (c) $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$.

P 1.65 För vilka reella x gäller sambandet $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k = -32$?

P 1.66 Låt $z = 3 + 2i$ och $w = -1 + 4i$. Bestäm

(a) $z + w$ (b) $z - w$ (c) $-3w$ (d) $\operatorname{Re} w$ (e) $\operatorname{Im} z$

(f) $\bar{w}$ (g) zw (h) $|z|$ (i) $\frac{z}{w}$

P 1.67 Låt $z = 2 + 3i$. Beräkna $|z|^2$, z^2 och $|z^2|$.

P 1.68 Beräkna $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{3+4i}\right)$ och $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{3+4i}\right)$.

P 1.69 Bevisa formlerna $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z\bar{z} = |z|^2$ för alla komplexa tal z.

P **1.70** Visa räknelagen $|zw| = |z|\,|w|$ för komplexa tal med hjälp av sambandet $|z|^2 = z\bar{z}$.

P **1.71** Räkna ut i^0 i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, ... Vad kan allmänt sägas om i^{-n} för heltal $n \geq 0$?

P **1.72** Räkna ut z^{-1}, z^{-2} och z^{-3} då (a) $z = -i$ (b) $z = 1 - i$ (c) $z = a + ib$.

P **1.73** Lös ekvationerna

(a) $z + 3 - i = 7 + 3i$ (b) $7z - 3 + 2i = 4 + i$ (c) $2\bar{z} + 1 + i = \overline{5 - 3i}$
(d) $(2 + 3i)z = 1 - i$ (e) $(1 + i)z + (7 + 2i)\bar{z} = 2 + 5i$.

P **1.74** Vilken av punkterna $z = \dfrac{(1+2i)^4(2-3i)}{(2-i)^2}$ och $w = \dfrac{(\sqrt{2}+i)^3(1-i)(\sqrt{17}-i)}{1-\sqrt{2}i}$ ligger längst från origo?

P **1.75** Räkna ut $|z|$ då z är (a) $\dfrac{(3+i)(5-i)}{(4+3i)(2i-3)}$ (b) $(2-i)^{-12}$.

P **1.76** I denna uppgift ska vi se på hur det komplexa talsystemet definieras. Definiera alltså ett komplext tal z som ett ordnat talpar $z = (x, y)$, där $x, y \in \mathbb{R}$ ('ordnat' betyder att $(x, y) \neq (y, x)$ om $x \neq y$). Om nu $z = (x, y)$ och $w = (u, v)$ är två komplexa tal definierar vi räknesätten $+$ och $\cdot$ enligt

$$z + w = (x + u, y + v)\,,\ z \cdot w = (xu - yv, xv + yu).$$

(a) Vi behöver nu visa att våra komplexa tal uppfyller samma räknelagar som de reella talen så att vi kan räkna 'som vanligt' med komplexa tal. Då bevisen är ganska lika varandra nöjer vi oss med att visa några av dessa räknelagar. Visa därför att $z + w = w + z$ och att $c(wz) = (cw)z$ för alla komplexa tal $c = (a, b)$, $z = (x, y)$ och $w = (u, v)$.

(b) Visa att $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ och att $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$ så att de komplexa talen på formen $(x, 0)$ beter sig precis som de reella talen. Vi skriver därför $x = (x, 0)$ i fortsättningen.

(c) Sätt nu $i = (0, 1)$ och visa att då är $i^2 = -1$. Visa också att det komplexa talet $z = (x, y)$ kan skrivas $z = (x, y) = x + iy$.

P **1.77** Visa att en ekvation $z^2 = a + ib$ (med reella a och b) alltid har lösningar $z = x + iy$ (med reella x och y) genom att visa att ekvationen är ekvivalent med systemet av ekvationer

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{och} \quad 2xy = b$$

och visa att detta system alltid har reella lösningar x och y. En hjälp är att se att ekvationerna medför att $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

P **1.78** Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^2 = 5 - 12i$

P **1.79** Lös ekvationerna (a) $z^2 + (1 - 2i)z - 3 - i = 0$. (b) $(2 + i)z^2 + (1 - 7i)z - 5 = 0$.

P **1.80** Finn en andragradsekvation vars rötter är kvadraterna på rötterna till $z^2 + az + b = 0$.

P **1.81** Låt $p(z) = 5z^3 + 3z^2 + 5z + 3$. Beräkna $p(i)$ och faktorisera därefter p i reella faktorer av lägsta möjliga grad.

P **1.82** Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 10z + 25 = 0$ har rötterna $z = 2 + i$ och $z = -1 - 2i$. Lös ekvationen fullständigt.

P **1.83** Faktorisera polynomet $p(z) = z^5 - 10z^2 + 15z - 6$ fullständigt i komplexa respektive reella faktorer.

P **1.84** Bestäm de reella talen $a_0, a_1, \ldots, a_5$ så att polynomet $p(z) = z^6 + a_5z^5 + \ldots + a_1z + a_0$ har ett enkelt nollställe i $2 - i$ och ett dubbelt i i.

P **1.85** Ekvationen $2z^4 + 11z^3 + 33z = 18$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen.

P 1.86 Ekvationen $z^4 + 12z^2 + 35 = 2z^3 + 14z$ har en rot med realdelen 1. Lös ekvationen.

P 1.87 Lös ekvationerna (a) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ (b) $z^6 + 2 = 2z^3$.

P 1.88 Bestäm alla komplexa tal z sådana att $(z + 1 - i)^6 = (z - 1 + i)^6$.

P 1.89 Visa att man kan bestämma konstanten a så att polynomet $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + 2$ är delbart med $x^2 + 2x + 2$. Bestäm a och därefter alla nollställen till p.

P 1.90 Ange ett sjättegradspolynom med rationella koefficienter som har ett dubbelt nollställe i punkten $z = \sqrt{2}$ och ett enkelt nollställe i punkten $z = i$.

P 1.91 För vilka reella a har ekvationen $(z + i)^4 = a$ minst en reell rot? Lös ekvationen för dessa a.

2 Funktioner

P 2.1 Antag att f är en funktion med $D_f = V_f = \mathbb{R}$ och att f har en invers funktion f^{-1}. Undersök om funktionen g har en invers funktion g^{-1} och bestäm den i så fall uttryckt i f^{-1} om

(a) $g(x) = f(x) - 2$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{1 + f(x)}$ (c) $g(x) = f(x^2)$ (d) $g(x) = f(x)^2$

P 2.2 Visa att funktionen $f(x) = x^3 + x$ har en invers funktion f^{-1} och bestäm $f^{-1}(y)$ då

(a) $y = 0$ (b) $y = 2$ (c) $y = -2$ (d) $y = 10$

Försök inte att bestämma $f^{-1}(y)$ för alla $y \in D_{f^{-1}}$!

P 2.3 Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$. Bestäm, om möjligt, inversen f^{-1} samt definitions- och värdemängd för f och f^{-1}.

P 2.4 Bestäm eventuell invers f^{-1} till den funktion f som ges av

(a) $f(x) = x^2\,,\quad -3 \le x \le -1$ (b) $f(x) = x^2\,,\quad -4 \le x \le -3$ eller $1 \le x \le 2$.

P 2.5 För vilka reella konstanter a, b och c gäller att funktionen

$$f : x \mapsto \frac{x - a}{bx - c}$$

är sin egen invers, d.v.s. att $f^{-1}(x) = f(x)$ för $x \in D_f$?

P 2.6 Bestäm definitionsmängden samt (om möjligt) inversen till f om $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$.

P 2.7 Förenkla följande uttryck till en term: (a) $\ln 2 + \ln 8$ (b) $2\ln 3 + \ln 2$ (c) $\ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{2}$.

P 2.8 Ordna talen $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5$, $\ln 7 + 2\ln 6 - \ln 2$, $7\ln 2$, $3\ln 5$ och $2\ln 11$ efter storlek.

P 2.9 Förenkla följande uttryck till en term: (a) $\ln x^2 - 3\ln x$ (b) $2\ln 3 + \ln 6 - 3\ln 2$

P 2.10 Visa, med hjälp av olikheten $\ln x > 0$ då $x > 1$, att funktionen ln är strängt växande, d.v.s. att $x_1 < x_2 \Longrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ gäller för $x_1 \in D_{\ln}$ och $x_2 \in D_{\ln}$.

P 2.11 Rita följande kurvor: (a) $y = \ln(x - 2)$ (b) $y = \ln x - \ln x^2$.

P 2.12 Bestäm definitionsmängden för funktionen f då

(a) $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$ (b) $f(x) = \sqrt{\ln x + \ln(4 - x)}$.

P 2.13 (a) Bestäm definitionsmängden till f om $f(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)}$.

(b) När Linus och Linnea jobbade med (a)-uppgiften försökte de använda omskrivningen $\sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)} = \sqrt{\ln(1-x) - \ln(3-x)}$. Kommentar? Vad hade du sagt om omskrivningen $\sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)} = \sqrt{\ln(x-1) - \ln(x-3)}$?

P 2.14 Endast i undantagsfall gäller att $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$.

(a) Ge exempel på tal $x > 0$ och $y > 0$ sådana att likheten ovan *inte* gäller.

(b) För vilka $x > 0$ finns $y > 0$ sådant att likheten gäller? Bestäm y för varje sådant x.

P 2.15 Bestäm $\ln 36$ uttryckt med $a = \ln 24$ och $b = \ln 54$.

P 2.16 Antag att $e^x = \sqrt{2}$ och $e^y = \sqrt{8}$. Räkna ut (a) e^{x+y} (b) e^{2x} (c) e^{2x+2y}.

P 2.17 För vilka reella x gäller sambandet $e^{2x+3} = e^{2x} + e^3$?

P 2.18 Visa att

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \text{och} \quad \left(e^x\right)^p = e^{px}, \ p \text{ heltal},$$

gäller för alla reella tal x och y, t.ex. genom att se på ln av vänsterledet i varje formel och använda lämplig regel för ln.

P 2.19 Förenkla följande uttryck:

(a) $\dfrac{e^{2x}e^{-y}}{e^{x-y}}$ (b) $\left(\dfrac{e^{-2x}e^{y}}{e^{-x}e^{2y}}\right)^{-1}$ (c) $e^{\ln 4 - \ln 3} + 2e^{\ln 3}$

(d) $\exp(\ln\sqrt{x+1} + \ln\sqrt{x-1})$ (e) $2\ln(e^{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x-1}})$

P 2.20 Bestäm definitionsmängden för funktionen f och undersök om f har en invers funktion f^{-1} och bestäm i så fall ett uttryck för den om $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{2 - e^x}}$.

P 2.21 Visa att $2 < e < 4$ genom att sätta $x = 2$ i olikheterna $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$ för $x > 0$, $x \neq 1$ och använda sambandet $\ln e = 1$.

P 2.22 Visa olikheterna

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots.$$

Ledning: De är ekvivalenta med olikheterna

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \ln e < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Visa att dessa i sin tur följer av olikheterna $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$ med $x = 1 + 1/n$.

P 2.23 Visa reglerna

$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha, \ x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \ \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}, \ \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \text{ och } \left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha$$

för reella tal α och β ($x > 0$, $y > 0$), t.ex. genom att se på ln av alla leden i varje formel.

P 2.24 Förenkla (a) $\sqrt[4]{\dfrac{25}{81}}$ (b) $\sqrt[4]{8 \cdot 32}$.

P 2.25 Bestäm alla reella lösningar till (a) $4x^4 = 81$ (b) $8x^3 + 27 = 0$ (c) $x^6 + 4027 = 0$.

P 2.26 Bestäm definitionsmängden samt (om möjligt) inversen till f om $f(x) = \dfrac{e^x + 4}{e^x + 3}$.

P 2.27 Bestäm definitionsmängden samt (om möjligt) inversen till f om
(a) $f(x) = \ln(x+1) - \ln(5-2x)$ (b) $f(x) = \ln(2-x) - \ln(1-x)$.

P 2.28 Bestäm (om möjligt) inversen till f om
(a) $f(x) = 3 - e^{2x} + 3e^x$ med $D_f =]-\infty, 0]$ (b) $f(x) = 3 - e^{2x} + 3e^x$ med $D_f = [0, \infty[$.

P 2.29 Talet $16^{1/4} + 3^{4/3} + 1/2^{-3} + 2^2/3^{-1/3} - 3^{1/3}/7^{-1}$ är ett heltal. Vilket?

P 2.30 Bestäm definitionsmängd för funktionen f då
(a) $f(x) = (2x - x^2)^{0.1}$ (b) $f(x) = \sqrt[4]{\ln(1-x)}$.

P 2.31 Undersök om funktionen f har en invers funktion f^{-1} och bestäm den i så fall om
(a) $f(x) = \ln(x^e + 1)$, $x \geq 0$ (b) $f(x) = (x - x^2)^\pi$, $0 < x < 1$.

P 2.32 Förenkla följande utryck: (a) $\dfrac{2^x 8^y}{2^{-x} 4^y}$ (b) $\left(\dfrac{3^{2x}}{9^{-x}}\right)^{1/2}$.

P 2.33 Visa att ${}^2\log 1000 < 10$.

P 2.34 (a) Visa att funktionen $f(x) = e^{2x} - 4e^x$, $x \geq \ln 2$, är injektiv. Bestäm också den inversa funktionen f^{-1}.
(b) Bestäm inversens definitions- och värdemängd.

P 2.35 Lös ekvationerna (a) $\ln x + \ln(x+3) = 1$ (b) $3^{2x-1} = 2^{3x+1}$.

P 2.36 För vilka reella tal x gäller (a) $(\ln x)^2 > -\ln x$ (b) $x^x > x$ och $x > 0$.

P 2.37 Bestäm alla lösningar $x > 0$ till ekvationen $(2x)^{\ln 2} = (3x)^{\ln 3}$.

P 2.38 Skissa grafer, dels till en funktion f med $D_f = \mathbb{R}$ som *är*, dels till en funktion g med $D_g = \mathbb{R}$ som *inte är*

(a) injektiv (b) växande (c) strängt växande (d) avtagande
(e) strängt avtagande (f) monoton (g) strängt monoton (h) uppåt begränsad
(i) nedåt begränsad (j) begränsad (k) jämn (l) udda.

P 2.39 Skissa grafen till en funktion f som är definierad för alla reella tal och som är
(a) ej jämn, ej udda (b) strängt växande, begränsad
(c) strängt avtagande, uppåt begränsad, ej nedåt begränsad.

P 2.40 Låt $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ och $h(x) = \ln x$. Uttryck i så enkel form som möjligt

(a) $f(g(x))$ (b) $f(h(x))$ (c) $g(f(x))$ (d) $g(h(x))$
(e) $h(f(x))$ (f) $h(g(x))$ (g) $f(g(h(x)))$ (h) $f(h(g(x)))$
(i) $g(f(h(x)))$ (j) $g(h(f(x)))$ (k) $h(f(g(x)))$ (l) $h(g(f(x)))$.

P 2.41 (a) Finn funktioner $f(x)$ och $g(x)$ sådana att $e^{-x^2} = f(g(x))$.
(b) Finn funktioner $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$ sådana att $\ln(1 + \cos^2 x) = f(g(h(x)))$.

P 2.42 Antag att f och g båda är strängt växande funktioner och definierade överallt. Är
(a) $f + g$ (b) fg (c) $f \circ g$
nödvändigtvis strängt växande? Ange motexempel i annat fall.
(d) Lös (a)–(c) men med ”växande” utbytt mot ”avtagande”.

P **2.43** Rita en enhetscirkel i ett koordinatsystem på ett rutat papper (t.ex. med enheten 10 rutor) och markera de punkter på cirkeln som svarar mot vinklarna $\pi/6$, $\pi/4$ och $\pi/3$. Använd sedan definitionen via enhetscirkeln för att blixtsnabbt ange $\cos v$ och $\sin v$ då v är

(a) $\dfrac{5\pi}{6}$ (b) $\dfrac{4\pi}{3}$ (c) $-\dfrac{\pi}{3}$ (d) $-\dfrac{\pi}{2}$ (e) $-\dfrac{3\pi}{4}$ (f) $-\dfrac{5\pi}{6}$

P **2.44** Ange snabbt (med hjälp av enhetscirkeln)

(a) $\cos\dfrac{25\pi}{4}$ (b) $\cos\dfrac{100\pi}{3}$ (c) $\cos\Big(-\dfrac{23\pi}{6}\Big)$ (d) $\sin\Big(-\dfrac{25\pi}{3}\Big)$

P **2.45** Förenkla $\cos n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.

P **2.46** Bestäm alla lösningar v till (a) $\sin v = \dfrac{1}{2}$ (b) $\cos v = \sin v$ (c) $\sin v = \sin(\pi - v)$.

P **2.47** Bestäm alla reella tal v sådana att

(a) $\cos v = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ och $\sin v = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $2\cos v = -1$ och $2\sin v = \sqrt{3}$

P **2.48** Räkna ut $\cos\Big(v + \dfrac{\pi}{6}\Big)$ då $\cos v = -\dfrac{2}{3}$ och (a) $0 < v < \pi$ (b) $\pi < v < 2\pi$.

P **2.49** Antag att u, v och w är vinklar i en triangel. Visa att $\sin\Big(\dfrac{u}{2} + \dfrac{v}{2}\Big) = \cos\dfrac{w}{2}$.

P **2.50** Räkna ut (a) $\tan 0$, $\tan\dfrac{\pi}{4}$, $\cot\dfrac{\pi}{4}$ och $\cot\dfrac{\pi}{2}$ (b) $\tan\dfrac{\pi}{6}$, $\cot\dfrac{\pi}{6}$, $\tan\dfrac{\pi}{3}$ och $\cot\dfrac{\pi}{3}$.

P **2.51** Ange $\tan v$ och $\cot v$ då v är (a) $\dfrac{5\pi}{6}$ (b) $-\dfrac{\pi}{4}$ (c) $-\dfrac{\pi}{2}$ (d) $-\dfrac{5\pi}{6}$.

P **2.52** Vilka samband gäller mellan vinklarna u och v om (a) $\tan u = \tan v$ (b) $\cot u = \cot v$?

P **2.53** Bestäm alla lösningar v till följande ekvationer:

(a) $\tan v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\cot v = -1$ (c) $\cos v = -\sqrt{3}\sin v$ (d) $\tan v + \cot v = 2$.

P **2.54** Räkna ut $\tan(u + v)$ då $\tan u = 3/4$ och $\cot v = 2/3$.

P **2.55** Rita följande kurvor i samma koordinatsystem:

(a) $y = 2\cos x$, $y = \cos 2x$ och $y = \cos\dfrac{x}{2}$ (b) $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$ och $y = \sin\dfrac{x}{2}$.

P **2.56** Bestäm avståndet mellan punkterna P_1 och P_2 då de ges genom polära koordinater $r_1 = 1$ och $\phi_1 = \pi/3$ resp $r_2 = 3$ och $\phi = -\pi$.

P **2.57** Bestäm $u + v$ då $\tan u = 2$, $\tan v = 3$, $0 < u < \pi/2$ och $0 < v < \pi/2$.

P **2.58** Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

P **2.59** Låt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$.

(a) Visa att $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $-\pi < x < \pi$.

(b) Härled liknande formler för $\sin x$ och $\tan x$.

Anmärkning: Dessa formler är användbara vid beräkning av primitiva funktioner till vissa trigonometriska uttryck.

P **2.60** Antag att $\tan u = 1/7$ och $\tan v = 3/4$. Vilka värden kan $u + v$ ha?

P **2.61** Bestäm vinklarna i en likbent triangel där tangens för vinkeln vid spetsen är 2 gånger sinus för en av de två lika vinklarna vid basen.

P **2.62** Vad är beloppet av $e^{i\phi}$ om ϕ är reellt?

P 2.63 Skriv följande tal i polär form: $\begin{cases} z_1 = 1, & z_2 = -13, & z_3 = i, \\ z_4 = -1+i, & z_5 = i\sqrt{3}-1, & z_6 = -3\,e^{-i\pi/5}. \end{cases}$

P 2.64 I denna uppgift ska vi lösa den binomiska ekvationen $(z-i)^5 = 2\sqrt{3}\,i - 2$.

(a) Skriv högerledet på polär form.
(b) Sätt $z - i = re^{iv}$ där $r \geq 0$ och $v \in \mathbb{R}$. Hur ser ekvationen ut efter detta?
(c) Se på absolutbelopp och argument av båda leden. Vilket ekvationssystem för r och v ger detta?
(d) Lös detta ekvationssystem.
(e) Lös ekvationen $(z-i)^5 = 2\sqrt{3}\,i - 2$.

P 2.65 Lös ekvationerna (a) $z^3 = i\sqrt{3} - 1$ (b) $z^3 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1+i}$.

P 2.66 Visa att systemet av ekvationer

$$1 + \cos x + \cos 2x = 0 \qquad \text{och} \qquad \sin x + \sin 2x = 0$$

är ekvivalent med den enda ekvationen $1 + e^{ix} + e^{2ix} = 0$. Lös sedan systemet genom att i stället lösa denna ekvation.

P 2.67 Räkna ut $\operatorname{Re} w$ och $\operatorname{Im} w$ (som funktioner av $x \in \mathbb{R}$) då $w = i\,e^{2x-ix}$

P 2.68 Antag att C_1 och C_2 är komplexa konstanter och att a och b är reella konstanter. Bestäm komplexa konstanter A och B sådana att

$$C_1\,e^{(a+ib)x} + C_2\,e^{(a-ib)x} = e^{ax}\,(A\cos bx + B\sin bx) \quad \text{för } x \in \mathbb{R}.$$

P 2.69 Visa att $zw = rse^{i(\varphi+\psi)}$ och $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{s}e^{i(\varphi-\psi)}$, då z och w ges i polär form $z = re^{i\varphi},\ w = se^{i\psi}$.

P 2.70 Räkna ut $(1+i)^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

P 2.71 Bestäm komplexa tal a och b sådana att

$$(-2+2i)a + (1-2i)(ax+b) = x \quad \text{för alla reella tal } x$$

och bestäm sedan real- och imaginärdelarna av $(ax+b)\,e^{(1+i)x}$.

P 2.72 Räkna ut $\arcsin x$ och $\arccos x$ om x är

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (e) -1 (f) $\sqrt{3}$.

P 2.73 Räkna ut $\arctan x$ om x är

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (c) -1 (d) $-\sqrt{3}$.

P 2.74 Man vet att $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ och att $\tan x = 2$. Bestäm x.

P 2.75 Beräkna (a) $\arcsin\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)$ (b) $\arccos\left(\cos\dfrac{7\pi}{5}\right)$ (c) $\arctan\left(\tan\dfrac{16\pi}{5}\right)$.

P 2.76 Från en punkt på en cirkel med radie R syns en korda under vinkel α. Hur lång är kordan?

P 2.77 Betrakta åter egenskaperna (a)–(l) i uppgift P 2.38. För varje egenskap (a)–(l), vilka övriga egenskaper är oförenliga med denna? (Vi betraktar endast funktioner f med $D_f = \mathbb{R}$.)

P 2.78 Räkna ut $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ då

(a) $v = \arcsin\dfrac{1}{3}$ (b) $v = \arccos\dfrac{2}{3}$ (c) $v = \arctan 2$
(d) $v = \arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ (e) $v = \arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ (f) $v = \arctan(-2)$.

P **2.79** Räkna ut $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right)$ exakt.

P **2.80** Låt $\alpha = \arcsin\frac{13}{14}$ och $\beta = \arccos\frac{1}{7}$.

(a) Beräkna $\tan(\alpha+\beta)$.
(b) Bestäm alla vinklar med samma tangensvärde som i (a).
(c) Stäng in $\alpha+\beta$ i ett öppet intervall av längd högst π.
(d) Beräkna $\alpha+\beta$.

P **2.81** Låt α och β vara som i uppgift P 2.80.

(a) Bestäm tre komplexa tal som har i tur och ordning α, β och $\alpha+\beta$ som argument.
(b) Bestäm alla argument för det tredje talet i (a).
(c) Stäng in $\alpha+\beta$ i ett öppet intervall av längd högst 2π.
(d) Beräkna $\alpha+\beta$.

P **2.82** Förenkla så långt det går

(a) $3\arctan 2 - \arctan\frac{2}{11}$ (b) $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan 4$.

P **2.83** Låt $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + e^{-x^2}\right)$, $x \geq 0$. Bestäm om möjligt f^{-1}.

P **2.84** (a) Skriv $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$ utan arcusfunktioner.
(b) Rita grafen till $g(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$.

P **2.85** Vi studerar ekvationen $\arctan x = 2\arccos x$.
(a) Visa att om x löser ekvationen så måste $1/\sqrt{2} < x < 1$. (b) Lös ekvationen!

P **2.86** Bevisa följande samband för hyperboliska funktioner. Ange också hur motsvarande samband för trigonometriska funktioner ser ut!

(a) $\sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$ (b) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$.

P **2.87** Bestäm inversen till tanh. Ange också definitions- och värdemängd för tanh och $\tanh^{-1}$.

P **2.88** Betrakta två rymdskepp som rör sig rakt mot varandra med farterna v_1 och v_2 i förhållande till en fix punkt mellan dem. I klassisk mekanik är som bekant deras relativa hastighet $v = v_1 + v_2$, men enligt relativitetsteorin är den

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}.$$

(Vi mäter hastigheterna som bråkdelar av ljushastigheten c; t.ex. betyder $v = 1/10$ hastigheten $c/10$, d.v.s. ca 30.000 km/s.) Använd additionsformeln för tanh i uppgift P 2.86b för att beskriva även detta senare samband som en addition. Förklara med hjälp av grafen till tanh!

P **2.89** Betrakta följande mängd av funktioner:

$$M = \left\{(\ )^2, (\ )^3, \sqrt{\ }, |\ |, \ln, \exp, \cos, \sin, \tan, \arccos, \arcsin, \arctan\right\}.$$

(Med $(\ )^2$ menas funktionen $x \mapsto x^2$ o.s.v.). Skissa funktionernas grafer och ange sedan alla $f \in M$ sådana att

(a) f är injektiv (b) f är strängt växande (c) f är strängt avtagande
(d) f är begränsad (e) $f \geq 0$ (f) $D_f = \mathbb{R}$
(g) $V_f = \mathbb{R}$ (h) f är jämn (i) f är udda

P **2.90** Betrakta återigen funktionerna i uppgift P 2.89. Lös för samtliga dessa funktioner ekvationen $f(x) = f(y)$, $x, y \in D_f$.

3 Gränsvärde och kontinuitet

P **3.1** (a) Vilka av pilarna $\Rightarrow, \Leftarrow, \Longleftrightarrow$ är korrekta mellan "$x^2 = 4$" och "$x = 2$"?
(b) Är det så att $x < 1/1000 \Rightarrow 1/x > 1000$?
(c) Visa att $0 < x < 1/1000 \Rightarrow 1/x > 1000$.

P **3.2** Övertyga dig om att $|x - 4| < 9 \Longleftrightarrow -5 < x < 13$.

P **3.3** De flesta tycker nog att "x^2 växer snabbare än $2x$ för stora positiva x". Tycker du att "$\ln(x^2)$ växer snabbare än $2\ln(x)$ för stora positiva x"?

P **3.4** Skissa grafen och bestäm $\lim_{x\to\infty} f(x)$ då $f(x) = \ln x$.

P **3.5** Beräkna (a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^3 + x^2}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2} + x + 1\right)$.

P **3.6** Låt $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$. Beräkna $\lim f(x)$ då (a) $x \to 7$ (b) $x \to 3$ (c) $x \to \infty$.

P **3.7** Vad är (a) $\lim_{n\to\infty} 1$ (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \dfrac{n}{n+m}\right)$ (c) $\lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+m}\right)$?

P **3.8** (a) Vad menas med att $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$?
(b) Bestäm ett tal ω sådant att $\left|\dfrac{x}{x-1} - 1\right| < \dfrac{1}{10}$ då $x > \omega$.
(c) Bestäm för varje $\epsilon > 0$ ett ω sådant att påståendet $x > \omega \Rightarrow \left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} - 1\right| < \epsilon$ gäller.
Vad visar detta?

P **3.9** Visa att om f har ett ändligt gränsvärde A då $x \to \infty$ så är detta entydigt bestämt, d.v.s. att om också $f(x) \to B$ då $x \to \infty$ så är $A = B$.

P **3.10** Undersök gränsvärdena (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n + 1}{(-1)^n n - 1}$ (b) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cos \dfrac{1}{n}$

P **3.11** Undersök följande gränsvärden (a) $\lim_{x\to 0+} e^{-1/x}$ (b) $\lim_{x\to 0-} e^{-1/x}$ (c) $\lim_{x\to 0} e^{-1/x}$.

P **3.12** Räkna ut $\lim_{x\to\infty} x^{1/\ln x^2}$.

P **3.13** (a) Vad menas med att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = 1$?
(b) Vad menas med att f är en kontinuerlig funktion?
(c) Är $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ kontinuerlig för $x \geq 0$?
(d) Är $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x + \ldots + x^n}$ kontinuerlig för $x \geq 0$?

P **3.14** (a) Formulera och illustrera satsen om mellanliggande värden.
(b) Kan villkoren mildras?

P **3.15** Visa att funktionen $f(x) = x \ln x$, $x \geq 1$, har en invers funktion $f^{-1}(x)$, $x \geq 0$, och undersök $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f^{-1}(x) \ln x}{x}$.

P **3.16** Beräkna gränsvärdena (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1! + 2! + \ldots + (n-2)!}{n!}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1! + 2! + \ldots + n!}{n!}$.

P **3.17** Undersök $e^{-x} \ln x$ då $x \to 0+$ och $x \to \infty$.

P **3.18** Beräkna (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 7x}$ (d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

P **3.19** Räkna ut (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+3x)}$ (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

P **3.20** Räkna ut (a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ (b) $\lim_{n\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

P **3.21** Antag att $f(x) = \sin x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0$, men att $f(0)$ (ännu) inte är definierat. Kan man definera $f(0)$ så att f blir kontinuerlig?

P **3.22** Bestäm konstanterna A och B så att $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - Ax - B) = 0$.

P **3.23** Undersök (a) $\lim_{x\to\infty} x\big(\ln(x+1) - \ln x\big)$ (b) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$ (c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{\ln x^2}$.

P **3.24** Undersök $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2+x^3}$.

P **3.25** Visa att $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ med hjälp av standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

P **3.26** Visa att $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$. (Tips: Variabelbyte)

P **3.27** Visa standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ om $\alpha > 0$ med hjälp av $\lim_{x\to\infty} x/e^x = 0$.

4 Derivator

P **4.1** Linus minns att när man deriverar ”blir sinus cosinus och cosinus sinus, men någonstans är det ett minus”. Rita graferna till sin och cos och visa hur man ur dessa (och tolkningen av derivata) ser hur det ligger till.

P **4.2** (a) Vad betyder det att en funktion f är växande?
(b) Vad betyder det att en funktion f är strängt växande?
(c) Ange en funktion som är både växande och avtagande.
(d) Kan en funktion vara både strängt växande och strängt avtagande?

P **4.3** (a) Ge ett exempel på en (deriverbar) funktion f som har derivatan 0 på hela sin definitionsmängd D_f men som ändå inte är konstant.
(b) Varför går det inte att hitta ett sådant exempel där $D_f = \mathbb{R}$?
(c) Ge ett exempel på en (deriverbar) funktion f som uppfyller $f'(x) < 0$ för alla x i definitionsmängden D_f men som ändå inte är avtagande.
(d) Varför går det inte att hitta ett sådant exempel där $D_f = \mathbb{R}$?
(e) Finns det någon deriverbar funktion som är strängt växande men som inte uppfyller $f'(x) > 0$ för alla x?

P **4.4** Är det rimligt att $f(x) = e^x(x^2 - 10x + 4)$ har en derivata med teckenväxling $-0+0-$?

P **4.5** Linnea försöker köra snålt. Kan hon köra 100 km på en timme men alltid hålla sig under 98 km/h? Det verkar inte rimligt, eller hur? Visa orimligheten med lämplig sats. Linnea kör deriverbart.

P **4.6** Definiera begreppet derivata.

P **4.7** Hur lyder kedjeregeln, produktregeln och kvotregeln för derivator?

P **4.8** Derivera (a) $x^5 + 3x^2 + 8$ (b) $\cos 3x$ (c) $\dfrac{1}{5x^2}$ (d) $\arctan(-2x)$ (e) $x \sin 2x$

P 4.9 Derivera

(a) $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $(x-x^3)^{11}$ (c) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ (d) $\ln(-x)$
(e) $\ln|4x|$ (f) $x^2\ln x$ (g) $e^{-2/x}$ (h) $\ln(1+x^2)$

P 4.10 Derivera

(a) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ (b) $(\ln x)^3$ (c) $\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $\exp(\sqrt{1+\ln x})$
(e) $xe^{-1/\sqrt{x}}$ (f) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ (g) $e^{-x}\cos x$ (h) $\tan x - x$
(i) $\ln|\tan\dfrac{x}{2}|$ (j) $(\arctan x)^2$ (k) $\arctan\dfrac{4}{x}$ (l) $\arcsin(x^2-1)$

P 4.11 Ange om möjligt en funktion som är
(a) kontinuerlig men inte deriverbar för $x=2$
(b) deriverbar men ej kontinuerlig för $x=2$.

P 4.12 Beräkna (a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\arctan(2+h)-\arctan 2}{h}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-4x)-\sin 1}{3x}$.

P 4.13 Bestäm ekvationerna för tangenten och normalen till kurvan $y=x+\sqrt{x}$ i punkten $(1,2)$.

P 4.14 En cirkulär oljefläck utbreder sig på en vattenyta. I ett visst ögonblick är radien 200 m och just då ökar den med 5 m/h. Med vilken hastighet ökar oljefläckens area i samma ögonblick?

P 4.15 Räkna ut höger- och vänsterderivatan av $\big(2+|x|\big)e^x$ i $x=0$. Existerar $f'(0)$?

P 4.16 Är f deriverbar om (a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$?

P 4.17 Bestäm konstanterna A och B så att $f(x)=\begin{cases} Ae^x+Bx+x^2, & x\le 0\\ \sqrt{x+1}, & x>0\end{cases}$ blir deriverbar.

P 4.18 Formulera och illustrera satsen om derivatan av en invers funktion.

P 4.19 Funktionen $f(x)=1+e^{2x}$ har en invers f^{-1} (varför?). Bestäm $(Df^{-1})(2)$
(a) genom att bestämma f^{-1} och derivera (b) utan att först bestämma inversen.

P 4.20 Ett ögonblick en solig eftermiddag står solen 27 grader över horisonten och sjunker just då med hastigheten 7,0 grader i timmen. Hur snabbt växer då skuggan av en 2,0 meter hög lodrät stolpe? Svara i cm/min.

P 4.21 Räkna ut $f'(x)$ och $f''(x)$ där de existerar om $f(x)=\begin{cases} x\,(x\ln|x|-1)\,, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

P 4.22 I denna övning ska vi träna in en bra arbetsgång för att göra funktionsundersökningar. Uppgiften vi ska lösa är följande:

'Skissa grafen till $f(x) = \dfrac{4x - 4x^2 - 9}{x - 1}$*. Ange alla lokala extrempunkter till* f *samt deras karaktär och tillhörande extremvärden.'*,

men vi ska gå varsamt fram och dela upp detta problem i mindre delproblem.

(a) Bestäm definitionsmängden till f.

(b) Derivera f och faktorisera $f'(x)$ så långt det är möjligt.

(c) Gör en teckentabell för $f'(x)$. Var noga med att *alla* faktorer i $f'(x)$ får en egen rad i tabellen och att *bara* punkter där någon faktor är noll eller där f och/eller f' ej är definierade tas med i tabellen. Ge också f själv en rad underst i tabellen där du markerar om f växer eller avtar på varje intervall samt hur f beter sig i de punkter du tagit med i tabellen (t.ex. om f har lokalt extremvärde eller är odefinierad eller något sådant).

(d) Vilka funktionsvärden och gränsvärden till f behöver du beräkna för att kunna skissa f:s graf? Beräkna dessa.

(e) Skissa grafen till f. Se till att bilden blir stor, tydlig och lättläst (ungefär en halv A4 är lämplig storlek). Markera intressanta företeelser på grafen och märk ut dessas x- och y-koordinater med skalstreck på respektive koordinataxel.

(f) Läs uppgiften ovan en gång till och formulera ett svar där du är noga med att svara på *allt* som det frågas efter.

(g) Repetera stegen ovan tills du kan dem utantill och lova dig själv heligt och dyrt att du ska följa denna arbetsgång i *varje* funktionsundersökning du gör i framtiden. Upprepa löftet för dig själv tills du är övertygad om att du menar det.

Det vore ett misstag att sluta här och hasta vidare till någon annan uppgift eftersom det är viktigt att du alltid ser till att lära dig maximalt av varje uppgift du räknar. Använd därför grafen du ritat till att också besvara frågorna nedan.

(h) Ange värdemängden till f.

(i) Lös olikheten $f(x) \geq 0$.

(j) Hur många olika lösningar har ekvationerna $f(x) = 0$, $f(x) = 8$ och $f(x) = 10$?

(k) Ange f:s största och minsta värde.

(l) Gå nu vidare till nästa uppgift och lös den på samma sätt som du löst denna. Försök att inte titta alltför mycket på lösningen till denna uppgift.

P 4.23 Låt $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

(a) Rita grafen till f, d.v.s. rita kurvan $y = f(x)$.
(b) Bestäm f:s värdemängd.
(c) Visa olikheten $\dfrac{x^2}{x - 1} \geq 4$ då $x > 1$.
(d) Bestäm antalet skilda rötter till ekvationen $\dfrac{x^2}{x - 1} = 5$.
(e) Bestäm antalet olika rötter till ekvationen $\dfrac{x^2}{x - 1} = k$ för alla värden på konstanten k.

P 4.24 Faktorisera derivatan och bestäm med hjälp av teckentabell de intervall där f är strängt avtagande om (a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3(x^2 + 1)}$.

P 4.25 Rita grafen till funktionen $f(x) = (3 - 4x)e^{-2x^2}$. Ange alla lokala maxima och minima samt största och minsta värde, om sådana finns.

P 4.26 Bestäm alla lokala max- och minpunkter till f och rita kurvan om
(a) $f(x) = (2x+1)e^{-|x|}$ (b) $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$.

P 4.27 Ange största och minsta värde till $f(x) = x \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{4} - x,\ \dfrac{1}{2} \le x \le e^2$.

P 4.28 Ett tält utan botten har väggar som utgörs av en cirkulär cylinder och tak bestående av en halvsfär. Bestäm största möjliga volym hos tältet, då tältdukens area A är given. Motivera noga varför det blir ett största värde.

P 4.29 Funktionen $y = f(x)$, $x > 0$, är strängt växande och deriverbar, och $f(1) = 2$, $f(2) = 10$, $f'(1) = 3$ och $f'(2) = 5$. Är inversen f^{-1} deriverbar i punkten 2? Ange i så fall derivatan.

P 4.30 En likbent triangel är inskriven i en cirkel med radie R. Bestäm eventuellt största och minsta värde triangelarean kan ha. Motivera noga, som alltid!

P 4.31 I denna uppgift ska vi bekanta oss med medelvärdessatsen.

(a) Formulera och illustrera medelvärdessatsen.

(b) Sätt $f(x) = \arctan x$. Vad säger medelvärdessatsen om

$$\arctan x_2 - \arctan x_1$$

då $x_1 < x_2$?

(c) Vilka värden kan $f'(\xi)$ anta? Formulera ditt svar som en olikhet för $f'(\xi)$.

(d) Sätt in olikheten från (c) i ditt svar på (b). Vad ger detta?

(e) Upprepa (b), (c), (d) i fallet $0 \le x_1 < x_2 \le 1$. Vilken olikhet leder detta fram till?

P 4.32 (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är strängt avtagande på mängden M.
(b) Är det sant att $f' < 0$ på ett intervall I medför att f är strängt avtagande på I?
(c) Är det sant att $f' < 0$ på hela D_f medför att f är strängt avtagande?
(d) Är funktionen $f(x) = |x| - 2x$ strängt avtagande?

P 4.33 Visa eller ge ett motexempel till följande påståenden:
(a) $f \ge g \Rightarrow f' \ge g'$ (b) $f' \ge g' \Rightarrow f \ge g$.

P 4.34 För vilka reella tal gäller följande olikheter?
(a) $\dfrac{x}{1+x^2} - \arctan x \ge 0$ (b) $\ln x > \dfrac{x-1}{x}$ (c) $e^x - 1 < xe^x$.

P 4.35 I ett motell blir alla 80 rummen uthyrda varje natt om priset är 450 kr/dygn. En undersökning visade att för varje femtiolapp som lades på priset blev 4 rum tomma. Varje uthyrt rum kostar ägaren 50 kr/dygn, varje outhyrt 20 kr/dygn. Vilket bör priset vara för att vinsten ska bli så stor som möjligt? Priset måste vara delbart med 50.

P 4.36 Visa att $x \mapsto \cos x + x^2/2$ är strängt växande på intervallet $[0, \infty[$.

P 4.37 Är funktionen $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$ monoton på intervallet $]0, \pi/4[$?

P 4.38 Låt f vara en deriverbar funktion på $\mathbb{R}$ sådan att $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ och $\lim_{x\to\infty} f'(x) = B$ gäller, där A och B är ändliga. Visa att $B = 0$. Ge också exempel på en sådan funktion.

P 4.39 Är någon av funktionerna $|x| \sin x$ och $|x| \cos x$ kontinuerligt deriverbar?

P 4.40 (a) (Cauchys medelvärdessats). Antag att f och g är kontinuerliga på intervallet $[a, b]$ och deriverbara i $]a, b[$. Visa att det finns något $\xi \in]a, b[$ sådant att

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi).$$

Ledning: Använd medelvärdessatsen på $h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x)$.

(b) (l'Hospitals regel). Om f och g är definierade och deriverbara med $g'(x) \neq 0$ i en punkterad omgivning till $x = 0$ samt om

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$$

så gäller att

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

förutsatt att det sista gränsvärdet existerar.
Ledning: Definiera $f(0)$ och $g(0)$ på lämpligt sätt och använd (a).

(c) Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$ (d) Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 2x + 1}$.

P 4.41 Rita följande kurvor (a) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ (b) $y = \dfrac{1}{x} + 2 \arctan x + \ln \dfrac{|x|}{1 + x^2}$.

P 4.42 Visa att $\arctan(x + 1) - \arctan x = \arctan \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ för alla reella x.

P 4.43 Visa att f har lokalt minimum i $x = 0$ om $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 2x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

P 4.44 I en punkt på kurvan $y = x^4$, $x > 0$, dras kurvans tangent och normal. Dessa avgränsar tillsammans med y-axeln en triangel. Bestäm alla värden som triangelns area kan anta.

P 4.45 Två gator med bredd a respektive b korsar varandra under rät vinkel. Hur lång är den längsta stång som i horisontellt läge kan föras från den ena gatan till den andra?

P 4.46 Bestäm antalet skilda reella rötter till följande ekvationer: (a) $x^3 = x^2 - 5$
(b) $x = 3 \ln x$ (c) $\arctan x = \ln(1 + x)$ (d) $2 \ln(1 - x^2) = 1 + 4 \arcsin x$.

P 4.47 Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x - 100$, $1 \leq x < 9$.

P 4.48 Visa att $\ln x \leq \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ för $x \geq 1$.

P 4.49 Funktionen f är deriverbar i ett intervall I och $f'(x) \geq 1$ för alla $x \in I$. Visa att

$$f(x_2) - f(x_1) \geq x_2 - x_1$$

om $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ och $x_2 \geq x_1$.

P 4.50 Rita kurvan $y = \arcsin x + 2\sqrt{1 - x^2}$ och ange värdemängden.

P 4.51 Bestäm alla tal B sådana att $x^4 + 4x + B \geq 0$ för alla reella tal x.

P 4.52 Avgör för vilka reella värden på a och b som ekvationen $e^x = ax + b$ har ingen rot, en rot eller två reella rötter. Ledning: tangent.

P 4.53 För vilka konstanter a är $f(x) = e^{-x} + a \ln x$ monoton?

P 4.54 Derivera $f(x) = \dfrac{e^{x^2} (\arcsin x)^2 x \sqrt{|\cos x|}}{(\ln x)^6 \sin^2 x}$. Ledning: $D \ln |f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

P 4.55 Vilken är den minsta sektor i komplexa talplanet som rymmer alla tal $3 + \omega^2 - 2i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, och som utgår från origo?

P 4.56 Skriv summan $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ i sluten form.

5 Primitiva funktioner

P 5.1 Linnea kommer ihåg att $\sin^2 v$ antingen är $\dfrac{1+\cos 2v}{2}$ eller $\dfrac{1-\cos 2v}{2}$ men har glömt vilket. Föreslå ett enkelt v som reder ut vilket det ska vara.

P 5.2 Linus kommer ihåg att $\cos(a+b)$ antingen är $\cos a\cos b+\sin a\sin b$ eller $\cos a\cos b-\sin a\sin b$ men har glömt bort vilket. Föreslå enkla a, b som reder ut vilket det ska vara.

P 5.3 Räkna ut följande obestämda integraler:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \left(x^3+x-2\right)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2}$

(e) $\displaystyle\int (x-2)\sqrt{x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+4x^2}$ (h) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$

P 5.4 Denna uppgift är tänkt att illustrera och öva på den viktiga tekniken att känna igen derivator vid primitivberäkning.

(a) Betrakta integranden (d.v.s. funktionen innanför integraltecknet) i $\displaystyle\int \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$. Kan du hitta en faktor i integranden som är derivata av något annat uttryck som också ingår i integranden?

(b) Föreslå en lämplig ny variabel t att byta till som utnyttjar upptäckten du gjorde i (a). Beräkna $\dfrac{dt}{dx}$. Lös ut dt ur detta samband och utför variabelbytet.

(c) Använd ovanstående till att beräkna $\displaystyle\int \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}dx$.

(d) I $\displaystyle\int x^4\cos(x^5)\,dx$ är ingen faktor en derivata av något annat uttryck i integranden. Vi kan dock ändå beräkna denna med samma teknik som i (b) och (c) tack vare att en faktor i integranden 'nästan' är en derivata till ett annat uttryck i integranden (med 'nästan' menas här att faktorn är en konstant gånger derivatan). Vilken faktor är detta?

(e) Bryt ut lämplig konstant ur $\displaystyle\int x^4\cos(x^5)\,dx$ så att din faktor verkligen är derivatan av uttrycket du hittade i (d). Vilket variabelbyte vill du göra sedan?

(f) Utför variabelbytet och beräkna $\displaystyle\int x^4\cos(x^5)\,dx$.

(g) Beräkna $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ med samma teknik som ovan.

P 5.5 Beräkna följande obestämda integraler:

(a) $\displaystyle\int x\left(1+x^2\right)^5\,dx$ (b) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$

P 5.6 Bestäm $f(x)$ så att

(a) $f'(x)=e^{2x}+x^2-x$ och $f(0)=0$ (b) $f'(x)=\dfrac{x}{\left(2+3x^2\right)^3}$ och $f(x)\to 1$ då $x\to\infty$.

P 5.7 Beräkna

(a) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,dx$ (c) $\displaystyle\int x\ln|x|\,dx$

(d) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$ (e) $\displaystyle\int x\left(e^x+\ln x\right)\,dx$ (f) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$

(g) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

P 5.8 Beräkna $\displaystyle\int (4x^2-4x+6)e^{-2x}\,dx$ genom att först göra variabelbytet $-2x=t$.

P 5.9 Räkna ut

(a) $\displaystyle\int \left(x^3 + x\right) e^{x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int x^5 \cos x^3\, dx$ (c) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$ (d) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

P 5.10 Antag att f är definierad på ett intervall. Visa att om F och G är två primitiva funktioner till f så är $F(x) = G(x) + C$ för någon konstant C.

P 5.11 Linnéa gör följande kalkyl:

$$\begin{aligned}
\int \cos x \, \sin x \, dx &= \text{/P.I./} = \sin x \, \sin x - \int \sin x \, \cos x \, dx \\
&= \text{/P.I./} = \sin x \, \sin x - \left((-\cos x)\, \cos x - \int (-\cos x)\,(-\sin x)\, dx \right) \\
&= \sin^2 x + \cos^2 x + \int \cos x \, \sin x \, dx \\
&= 1 + \int \cos x \, \sin x \, dx.
\end{aligned}$$

Ur detta drar hon slutsatsen att $\displaystyle\int \cos x \, \sin x \, dx = 1 + \int \cos x \, \sin x \, dx$, d.v.s. $0 = 1$. Förklara var Linnéa tänkt fel!

P 5.12 Bestäm $f(x)$ så att $f'(x) = x\, e^{\sqrt{x}}$ för $x > 0$ och $f(1) = 0$.

P 5.13 Följande uttryck ska partialbråksuppdelas. Ange hur en korrekt ansats ska se ut.

(a) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ (b) $\dfrac{3x-1}{x^2(x^2+1)}$ (c) $\dfrac{2x+3}{(x+4)^2}$

(d) $\dfrac{3}{(x+4)^2}$ (e) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x+2)^3(x-3)^2}$ (f) $\dfrac{2x-4}{(x^2+x+5)^2(x-4)}$

P 5.14 Partialbråksuppdela $\dfrac{x+2}{x^3-1}$.

P 5.15 Linus har just lärt sig handpåläggning och kommer fram till att

$$\frac{x^2 - x - 3}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}.$$

Linnéa hävdar dock att svaret inte stämmer. Vem har rätt?

P 5.16 Bestäm alla primitiva funktioner till

(a) $\dfrac{x^4}{x^2+1}$ (b) $\dfrac{1-x^2}{4+x^2}$ (c) $\dfrac{x^3+5x^2+2x-1}{x+3}$

(d) $\dfrac{2x-3}{x^2+4x+13}$ (e) $\dfrac{1}{x^2-1}$ (f) $\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$

P 5.17 Bestäm den primitiva funktion f på $]1,\infty[$ till $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x^2}$ som uppfyller villkoret $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$.

P 5.18 Beräkna

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-8x^2+16}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+2x^2+5x}$ (f) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+4)(x^2+2x+4)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^3-5x^2-3x+12}{x^3+x-10}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

(i) $\displaystyle\int \frac{3-x^2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

P 5.19 Bestäm $f(x)$ för $x>1$ så att $f'(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^3(x-1)^2}$ och $f(2)=0$.

P 5.20 Bestäm alla primitiva funktioner till (a) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

P 5.21 Räkna ut (a) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x\arctan x}{(x^2+2)^2}\,dx$.

P 5.22 Räkna ut

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(1+x^n)}$ för $x>0$

(c) $\displaystyle\int x\big((\ln x)^2+e^{-2x}\big)\,dx$ (d) $\displaystyle\int x\big(\ln(x^2+1)-x^2\big)\,dx$

P 5.23 Bestäm $f(x)$ för $x>1$ så att $f'(x) = \dfrac{3x^2-6x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$ och $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

P 5.24 Beräkna

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{2-\sin^2 x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

(e) $\displaystyle\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{\sin 2x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

(i) $\displaystyle\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$ (j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ (k) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ (l) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$

P 5.25 Bestäm $f(x)$ då $f'(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$, $f(0)=0$.

P 5.26 Använd t.ex. Eulers formler eller partiell integration för att räkna ut

(a) $\displaystyle\int \sin 3x\sin 4x\,dx$ (b) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$ (c) $\displaystyle\int xe^{-x}\cos x\,dx$

P 5.27 Beräkna $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ då a och b är positiva konstanter.

P 5.28 Beräkna (a) $\displaystyle\int \frac{25\cos x}{4\cos x+3\sin x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x\sin^3 x\,dx$.

P 5.29 Beräkna $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ genom att

(a) göra variabelbytet $x=\sin t$ där $-\pi/2\le t\le\pi/2$ (b) partialintegrera.

P 5.30 Beräkna

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\,dx$ för $x>1$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ för $-1<x<1$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{x-4x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$ (k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ (l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$

P 5.31 Räkna ut (a) $\displaystyle\int x\sqrt{x^4+2x^2+3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{\cos 2x}\,dx$.

P 5.32 Bestäm $f(x)$ så att $f'(x)=(x+1)\sqrt{2x-x^2}$ och $f(1)=0$.

P 5.33 Bestäm $f(x)$ för $x>0$ så att $f'(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ och $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$.

P 5.34 Räkna ut

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ (c) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

P 5.35 Låt f vara den primitiva funktion till $|\sin x|$ som uppfyller villkoret $f(-\pi)=0$.

(a) Bestäm $f(x)$ då $x\in[-\pi,\pi]$. Var noga med att visa att f är en primitiv funktion.
(b) Bestäm $f(\pi)$.

P 5.36 För vilka konstanter a, b och c är $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ en rationell funktion?

P 5.37 Antag att $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ för $x<1$ och att $f(x)$ där har minsta värdet 5.

Visa att ekvationen $f(x)=9$ har exakt två olika reella rötter $x<1$.

P 5.38 Funktionen f är en primitiv funktion till $(1-x^2)e^{-x}$, $x\geq 0$ och $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Bestäm $f_{\min}$ och $f_{\max}$ om dessa existerar.

P 5.39 Låt f vara den primitiva funktion till $x^4\sin^2 x$ vars graf går genom punkten $(1,7)$. Är f monoton?

P 5.40 Härled en primitiv funktion till $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ genom att göra variabelbytet $x=\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$.

P 5.41 Bestäm den primitiva funktion f till $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$ som är sådan att $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt[6]{x}}$ existerar (ändligt). Vad blir gränsvärdet?

P 5.42 Härled rekursionsformeln

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x\,\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$$

för $n=2,3,\ldots$ genom att partialintegrera $\displaystyle\int \sin^n x\,dx=\int \sin x\,\sin^{n-1}x\,dx$.

Härled också motsvarande formel för $\displaystyle\int \cos^n x\,dx$.

6 Bestämda integraler

P 6.1 Hur ser man lättast att påståendet $\int_0^5 e^{-x}\cos(x^3)dx = 1$ måste vara falskt? Fundera över en figur!

P 6.2 Kan du ange någon begränsad funktion på intervallet $[0,1]$ som inte är integrerbar (i Riemanns mening)?

P 6.3 Vi ska beräkna $\int_0^1 \left(1+e^{-x}\right)^{-1} dx$ med hjälp av ett variabelbyte.

(a) Använd omskrivningar för att visa att $\int_0^1 \left(1+e^{-x}\right)^{-1} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$.

(b) Observera att faktorn e^x i täljaren är derivatan av uttrycket e^x i nämnaren. Vilken ny variabel t kan det alltså löna sig att byta till? Hur ser sambandet mellan dt och dx ut om du gör detta byte?

(c) När vi jobbar med bestämda integraler måste vi komma ihåg att gränserna ändras vid variabelbyten. Beräkna alltså de t-värden som svarar mot x-värdena 0 resp. 1 om t är variabeln från (b).

(d) Hur ser $\int_0^1 \left(1+e^{-x}\right)^{-1} dx$ ut efter att du gjort bytet i (b)? Räkna inte ut integralen ännu!

(e) Vilken integral får du om du istället gör bytet $s = 1+e^x$?

(f) Beräkna integralerna från (d) och (e). Observera att de måste bli lika eftersom båda är lika med vår sökta integral $\int_0^1 \left(1+e^{-x}\right)^{-1} dx$.

P 6.4 Räkna ut följande integraler.

(a) $\int_0^1 e^{2x}\, dx$ (b) $\int_1^2 \left(x^4-3x+1\right) dx$ (c) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx$ (d) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, dx$

(e) $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx$ (f) $\int_0^2 \sqrt{5x+2}\, dx$ (g) $\int_1^2 (1+2x)^{17}\, dx$ (h) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

(i) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2\, dx$ (j) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+3\sin x}\, dx$ (k) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$ (l) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$

P 6.5 Visa, genom att skatta uppåt och nedåt med lämpliga trappfunktioner, att

$$\frac{1}{3} \le \int_0^1 \sqrt{\frac{3}{3+16x+8x^3}}\, dx \le \frac{3}{4}.$$

P 6.6 Tack vare monotonitetsegenskapen (vad säger den?) behöver vi inte alltid skatta med trappfunktioner. Vi kan också skatta integraler med andra integraler.
(a) Antag att $0 \le x \le 1$. Ordna uttrycken 0, x^2 och x^4 efter storlek.
(b) Vilken olikhetskedja ger detta för funktionerna 1, $\frac{1}{1+x^2}$ och $\frac{1}{1+x^4}$ då $0 \le x \le 1$?
(c) Vad säger detta om $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$?
(d) Visa på liknande sätt att $1 \le \int_0^1 \sqrt{1+\sin x}\, dx \le \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$ ($\approx$ 1,219).
(e) Visa att skattningen nedåt kan skärpas till $\int_0^1 \sqrt{1+\sin x}\, dx \ge \sqrt{6}-\frac{4}{3}$ ($\approx$ 1,116)

P 6.7 Formulera integralkalkylens medelvärdessats. Rita också en figur som illustrerar innehållet i satsen.

P 6.8 Bestäm $f'(x)$ då

(a) $f(x) = \int_0^x t^2 \ln(t+1)\, dt$, $x > -1$ (b) $f(x) = \int_x^1 \frac{t^4}{t^2+1}\, dt$

(c) $f(x) = \int_0^1 e^{t^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$, $x > 0$

P 6.9 Beräkna $\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^{2\epsilon} \frac{dx}{\ln(1+x)}$.

P 6.10 Beräkna

(a) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$ (b) $\int_0^2 \left|x^3 - 1\right|\, dx$ (c) $\int_0^\pi \sin x\, |\cos x|\, dx$

(d) $\int_{-1}^2 \left(|x|^3 + |x|^2\right)\, dx$ (e) $\int_0^{10} (|x| + |x-1| + |x-2|)\, dx$

P 6.11 Räkna ut

(a) $\int_0^1 x^2 \cos \pi x\, dx$ (b) $\int_0^1 x^2 e^{3x}\, dx$ (c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

(d) $\int_1^3 \left(9x^2 + 4x\right) \ln x\, dx$ (e) $\int_0^2 \left(x^2 - x\right) |\sin \pi x|\, dx$ (f) $\int_1^5 \left|x^2 - 5x + 6\right| e^x\, dx$

(g) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2\, dx$ (h) $\int_1^2 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$ (i) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx$

(j) $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x}\, dx$ (k) $\int_0^\pi \cos^5 x\, dx$ (l) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\, dx$

P 6.12 Beräkna följande integraler:

(a) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$ (b) $\int_{-2}^0 \frac{10}{16 - 2x^2 - x^3}\, dx$ (c) $\int_1^3 |1 - \ln x|\, dx$.

P 6.13 Beräkna följande integraler:

(a) $\int_2^4 \frac{x^2}{x-1}\, dx$ (b) $\int_{-1}^0 \frac{8x^3 + 4x^2}{1 + 4x^2}\, dx$ (c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

(d) $\int_2^6 \frac{2x+5}{x^2 + 2x - 3}\, dx$ (e) $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3 + x^2 + 2x + 2}\, dx$ (f) $\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2 (x^2+3)}\, dx$

(g) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$ (h) $\int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}$ (i) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2 + 2|x| + 2}\, dx$

(j) $\int_0^3 \frac{|x-1|}{1 + |x-2|}\, dx$ (k) $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\, dx$ (l) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\cosh x}$

P 6.14 Beräkna

(a) $\int_0^{1/2} \frac{\arctan 2x}{(1-x)^2}\, dx$ (b) $\int_1^3 x^2 \ln \sqrt{1 + x^2}\, dx$ (c) $\int_0^\pi \sin^6 x\, dx$

(d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\, dx$ (e) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\, dx$ (f) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{(1 + \cos x)^3}\, dx$

(g) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \sin x}\, dx$ (h) $\int_{\pi/3}^{7\pi/3} \frac{dx}{5 - 4\cos x}$ (i) $\int_0^\pi x \sin^2 x\, dx$

(j) $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ (k) $\int_1^3 \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}\, dx$ (l) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[3]{x} + 1)}$

(m) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx$ (n) $\int_0^2 \sqrt{2 + 2x - x^2}\, dx$ (o) $\int_2^5 \sqrt{\frac{x}{x-1}}\, dx$

P 6.15 Visa att om f är kontinuerlig för alla x och om $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ för alla $a > 0$ så är f udda.

P 6.16 Beräkna $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

P 6.17 Vanlig trefasspänning består av tre sinusformade spänningar, fasförskjutna $2\pi/3$, samt en nollnivå. Effektivvärdet för spänningsskillnaden mellan en fas och nollan är 230 V. Beräkna effektivvärdet av spänningsskillnaden mellan två faser.

P 6.18 Beräkna följande generaliserade integraler, om de är konvergenta:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

P 6.19 Beräkna integralerna, om de är konvergenta.

(a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x+x^2}$ (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}$ (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

P 6.20 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})} \geq \ln\frac{n}{4}$ för alla heltal $n \geq 1$.

P 6.21 Visa att $\displaystyle\int_0^{x} \sqrt{1+t^3}\,dt < x + \frac{x^4}{8}$ då $x > 0$.

P 6.22 Man vill stänga in $\displaystyle\int_0^{2} x^2\,dx$ mellan över- och undersummor genom att dela intervallet $[0,2]$ vid punkten $x = t$. Hur ska t väljas, om man vill få

(a) undersumman så stor som möjligt?
(b) översumman så liten som möjligt?
(c) skillnaden mellan översumman och undersumman så liten som möjligt?

P 6.23 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n} - 2$ för varje heltal $n \geq 1$.

P 6.24 Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n+n}{n}\right)^{1/n}$ (använd Riemannsummor).

P 6.25 Man kan visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} \to \ln 2$ då $N \to \infty$. Bestäm, utgående från detta, något tal N sådant att $\displaystyle 0 < \ln 2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} < 10^{-4}$.

P 6.26 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2}$ för alla heltal $n \geq 1$.

P 6.27 Bestäm $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{p^2+k^2}$ för varje heltal $p \geq 1$.

P 6.28 Man kan definiera de trigonometriska funktionerna utgående från integraler. Låt v vara längden av bågen på cirkeln $x^2+y^2=1$ från punkten $(1,0)$ till en punkt (x,y), där $x > 0$, $y > 0$.

(a) Visa att $\displaystyle v = \int_0^{y} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

(b) Definiera $\cos v = x$, $\sin v = y$ och $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$ för dessa x, y och v. Visa att $\sin v < v < \tan v$.

7 Tillämpningar av integraler

P **7.1** Bestäm arean av det område som ligger i första kvadranten och som begränsas av de tre kurvorna $y = 2/x$, $y = 2x$ och $y = x/8$.

P **7.2** Linus och Linnéa tvistar om cirkelns area. De är överens om att $3 < \pi < 4$, men det råder oenighet om huruvida arean är πR^2, $2\pi R^2$ eller $2\pi R$. Förklara varför de felaktiga alternativen är uppenbart orimliga.

P **7.3** Beräkna längden av kurvan $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $R/2 \le x \le R$. Kontrollmöjligheter?

P **7.4** Kossan Rosa är bunden med ett snöre vid ett träd. Snöret har längden L och det cylindriska trädet har radien R. I startögonblicket står Rosa med snöret fullt sträckt, rakt radiellt ut från trädet. Rosa börjar vandra runt trädet, hela tiden med sträckt snöre. Hur långt har hon gått då hon kommer in till stammen? (Såväl snörets tjocklek som Rosas utsträckning försummas.)

P **7.5** Området mellan kurvorna $y = (x-3)/(x+1)$ och $y = e^{2x}$, $0 \le x \le 1$, roteras ett varv kring linjen $x = 2$. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer.

P **7.6** Området mellan kurvan $y = 1/(x^2+2x+5)$, $-3 \le x \le -1$, och kurvans horisontella tangent roteras ett varv kring y-axeln. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer.

P **7.7** Halvcirkeln $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$, roteras ett varv kring linjen $x = 2R$. Beräkna arean av den rotationsyta som uppkommer.

P **7.8** Antag att f är en kontinuerligt deriverbar och strängt avtagande funktion på intervallet $[-1, 3]$ samt att $f(-1) = 4$ och $f(3) = -2$. Låt D vara det begränsade område som avgränsas av kurvan $y = f(x)$ och linjerna $x = -1$ och $y = -2$.

(a) Rita en principskiss av D och ange arean av D som en integral.

(b) Låt K_b vara den rotationskropp som uppstår då D roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Ange kroppens volym V_b och arean A_b av kroppens begränsningsyta som integraler. Notera att den cirkulära bottenplattans area ingår i A_b, och den behöver inte anges som en integral.

(c) Låt K_c vara den rotationskropp som uppstår då D i stället roteras ett varv kring linjen $y = -3$. Ange kroppens volym V_c och arean A_c av kroppens begränsningsyta som integraler. De triviala delarna av A_c behöver dock inte anges som integraler.

8 Maclaurin- och Taylorutveckling

P **8.1** Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 3 kring $x = 4$ till $\sqrt{x}$ med rest i ordoform.

P **8.2** Förenkla följande uttryck till formen $p(x) + \mathcal{O}(x^n)$, där $p(x)$ är ett polynom och resttermen är den bästa möjliga (största möjliga heltal n), som vanligt för x nära 0:

(a) $\big(1 + x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)\big) - \big(x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)\big) + \big(2 - x^2 + \mathcal{O}(x^4)\big)$

(b) $\big(x - x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)\big)\big(x - x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)\big)$

(c) $\big(x - x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)\big)^3$

P **8.3** Förenkla $\mathcal{O}(t^4)$ till $\mathcal{O}(x^n)$ med största möjliga heltal n om (a) $t = -x$ (b) $t = 2x^2$ (c) $t = 3x + x^2$ (d) $t = -x^3/2 + \mathcal{O}(x^4)$ (e) $t = \mathcal{O}(x)$ (f) $t = \mathcal{O}(x^3)$

P **8.4** Använd standardutvecklingar för att bestämma Maclaurinutvecklingen till och med grad 4 med restterm i ordoform (d.v.s. $\mathcal{O}(x^5)$ eller högre) till följande funktioner.
(a) e^{-x} (b) $\sin 2x$ (c) $x \arctan x$ (d) $(1+x)^{-1}$ (e) $\cos(x^2)$ (f) $\ln(1-x^2)$.

P 8.5 Bestäm Maclaurinutvecklingen, med rest i ordoform, av $\big(\ln(1+x)\big)^3$. Utveckla så långt att man ser de tre första icke-försvinnande termerna.

P 8.6 Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 4 med rest i ordoform av
(a) $\sqrt{9+x^2}$ (b) $\ln(2-x)$ (c) $\cos(2x+\pi/2)$ (d) $\exp(1-2x^2)$

P 8.7 Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{\ln(1-x^2)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{(\arctan x)^2}$.

P 8.8 Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cos\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}-\tan\frac{1}{x}}$.

P 8.9 Bestäm konstanterna a, b och c så att följande gränsvärden existerar. Beräkna gränsvärdena!
(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-ax}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-bx}{x^3}$ (c) $\displaystyle\frac{\cos x-e^{-x^2}+c\sin^2 x}{\sqrt[3]{1+3x^2}-\sqrt{1+2x^2}}$ då $x\to 0$.

P 8.10 Låt $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ Bestäm konstanten a så att f blir kontinuerlig i $x=0$.

Undersök sedan om $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$, d.v.s. $f'(0)$, existerar med detta val av a.

P 8.11 Bestäm konstanterna a och b så att $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)+2e^x-2\cos(ax)}{x^3}$ existerar ändligt, samt bestäm gränsvärdet.

P 8.12 Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x+ax^2)-1+\ln(1+ax)}{1-\cos x}$ existerar och är ändligt. Beräkna också gränsvärdet.

P 8.13 Undersök $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$.

P 8.14 Är funktionen $\displaystyle f(t)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin tx-\ln(1+x)}{e^{tx}-\sqrt{1+2x}}$ kontinuerlig?

P 8.15 Att beräkna långa Maclaurinutvecklingar av sammansatta funktioner kan bli arbetsamt om man inte går systematiskt till väga. Vi ska här utveckla $\ln(1+x^2+\sin x)$ med rest $\mathcal{O}(x^5)$ genom att utveckla $\ln(1+t)$ med $t=x^2+\sin x$; notera att $x\to 0\Rightarrow t\to 0$.

(a) Maclaurinutveckla $t=x^2+\sin x$ till och med grad 4 i x, alltså med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

(b) Maclaurinutveckla $\ln(1+t)$ till och med grad 4 i t, alltså med rest $\mathcal{O}(t^5)$.

(c) Bestäm i tur och ordning utvecklingarna för $t^2=t\cdot t$, $t^3=t^2\cdot t$, $t^4=t^3\cdot t$, $\mathcal{O}(t^5)$, alla uttryckta i x och med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

(d) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $\ln(1+x^2+\sin x)$ med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

P 8.16 Vi ska utveckla $1/\sqrt{1+x\arctan x}$ med rest $\mathcal{O}(x^8)$ genom att utveckla $(1+t)^{-1/2}$ med $t=x\arctan x$.

(a) Maclaurinutveckla $t=x\arctan x$ med rest $\mathcal{O}(x^8)$.

(b) Hur långt måste man Maclaurinutveckla $(1+t)^{-1/2}$, med $t=x\arctan x$, för att få utvecklingen för $1/\sqrt{1+x\arctan x}$ med rest $\mathcal{O}(x^8)$? Varför räcker den längden?

(c) Maclaurinutveckla $1/\sqrt{1+x\arctan x}$ med rest $\mathcal{O}(x^8)$. Jämför med uppgift P 8.15.

P 8.17 Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 5 med restterm i ordoform för $\cos(\sin x)$.

Vilken utveckling för $\displaystyle\int_0^x \cos(\sin t)\,dt$ får man av detta?

P 8.18 Bestäm ett polynom p av lägsta möjliga grad sådant att
(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - p(x)}{x^2} = 2$ (b) $\dfrac{e^{\sin x} - p(x)}{x^5} \to -1$ då $x \to 0$.

P 8.19 Man kan härleda Maclaurinutvecklingen av ordning 6 för $\tan x$ med restterm i ordoform genom att ansätta en utveckling

$$\tan x = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

och sedan bestämma koefficienterna i utvecklingen med hjälp av kända utvecklingar och enkla samband.

(a) Motivera varför inga termer med jämna gradtal behövs i ansatsen.

(b) Använd standardutvecklingarna för $\sin x$ och $\cos x$ och identiteten $\cos x \tan x = \sin x$ för att bestämma koefficienterna c_1, c_3, c_5 och därmed utvecklingen för $\tan x$.

(c) Som alternativ till metoden i (b), använd standardutvecklingen för $\arctan x$ och identiteten $\tan(\arctan x) = x$ för att bestämma utvecklingen för $\tan x$.

(d) Använd den i (b) eller (c) erhållna utvecklingen för $\tan x$ för att härleda Maclaurinutvecklingen av ordning 7 för $\ln(\cos x)$ med restterm i ordoform. Ledning: Derivera!

P 8.20 Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 6 till (a) $\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,dt$ (b) $\arcsin x$.

P 8.21 Räkna ut (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2 - (\ln x)^2}{x - \sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 \ln \dfrac{x+2}{x-2} - 4x^2\right)$.

P 8.22 Visa att funktionen $f(x) = xe^{x^2}$ är inverterbar och bestäm Maclaurinutvecklingen av inversen $f^{-1}(x)$ med rest $\mathcal{O}(x^7)$. (Att f^{-1} är tillräckligt snäll behöver ej motiveras.)

P 8.23 Om $f(x)$ ges av följande uttryck, avgör om f har lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera i $x = 0$: (a) $2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (b) $-2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (c) $2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (d) $-2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (e) $5 + x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ (f) $3 + \mathcal{O}(x^2)$

P 8.24 Undersök $f(x)$ med avseende på lokalt extremvärde för $x = 0$ om $f(x)$ ges av
(a) $\cosh x - \cos x$ (b) $\ln(1 - x^2) + \cos x + 3e^x - \arctan 3x$ (c) $\sin^2 2x + 2e^{-2x^2}$.

P 8.25 I många (tillämpade) sammanhang nöjer man sig med att för x nära 0 skriva $\sin x \approx x$ och $\ln(1 + x) \approx x$ och drar slutsatser av det. Viss försiktighet måste dock iakttas. Jämför uppgifterna P 8.8a och P 8.8b. Kommentar?

P 8.26 Undersök om $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$ har gränsvärde (vilket i så fall?) då $n \to \infty$.

P 8.27 Bestäm Taylorutvecklingen av $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x - 5$, med rest i Lagranges form,
(a) kring $x = 1$, ordning 2 (b) kring $x = 0$, ordning 2 (c) kring $x = 0$, ordning 4.

P 8.28 Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 0 kring a till en allmän funktion f, med restterm i Lagranges form. Hur blir uttrycket för $f(b) - f(a)$? Känns det bekant?

P 8.29 (a) Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 med restterm i Lagranges form för $\sin x$.

(b) Visa att $\left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)\right| \le \dfrac{|x|^5}{120}$ för alla x.

(c) Visa att $\dfrac{x^5}{240} \le \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \le \dfrac{x^5}{120}$ då $0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$. Ange speciellt var ξ kan finnas.

(d) Ange en liknande olikhet för $-\dfrac{\pi}{3} \le x \le 0$. Var kan ξ finnas nu?

(e) Visa att $\left|\dfrac{\sin x}{x} - \left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right)\right| \le \dfrac{|x|^4}{120}$ för alla $x \ne 0$.

P 8.30 (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 1 till $\arctan x$ med restterm i Lagranges form.

(b) Visa att $\left|\arctan(1/5) - 1/5\right| \leq 1/100$.

P 8.31 Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för e^x, med restterm i Lagranges form. Approximera sedan $1/\sqrt{e}$ med hjälp av denna utveckling, och visa att approximationsfelets belopp är mindre än 10^{-3}.

P 8.32 (a) Maclaurinutveckla $f(x) = 5(1+x)^{1/2}$ till ordning 1, med restterm i Lagranges form. Mellan vilka gränser befinner sig talet ξ?

(b) Använd att $\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = 5\sqrt{1+1/25}$, och utvecklingen i (a), för att finna en rationell approximation till talet $\sqrt{26}$. Var finns ξ nu? Vilken uppskattning av absolutbeloppet av approximationsfelet ger det?

(c) Samma uppgift som i (b), men nu för $\sqrt{24}$.

P 8.33 Som bekant är $\dfrac{\pi}{6} = \arcsin\dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Vi ska använda detta samband för att få ett närmevärde till π.

(a) Maclaurinutveckla $(1+t)^{-1/2}$ till ordning 2 i t och med restterm i Lagranges form.

(b) Bestäm med hjälp av utvecklingen i (a) ett närmevärde till π och uttryck felet i approximationen som en integral.

(c) Visa att felets absolutbelopp är mindre än 10^{-2}.

P 8.34 (a) Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 3 med restterm i Lagranges form för $\ln(1+x)$.

(b) Visa med hjälp av utvecklingen i (a) att

$$\left|\ln\frac{11}{10} - \frac{143}{1500}\right| \leq \frac{1}{40\,000}.$$

(c) Bestäm en bättre approximation p/q till $\ln(11/10)$, nämligen en som uppfyller

$$\left|\ln\frac{11}{10} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{100\,000}.$$

p/q får skrivas som en oförenklad summa av rationella tal.

P 8.35 Approximera följande tal med fel vars absolutbelopp är högst $\dfrac{1}{100}$: (a) $\cos\dfrac{1}{10}$ (b) $\cos 1$.

P 8.36 Bestäm ett polynom $p(x)$ som approximerar $\cos x$ för $-1/2 \leq x \leq 1/2$ så att felets absolutbelopp blir mindre än 10^{-2} för alla dessa x.

P 8.37 Bestäm ett polynom som approximerar e^{-x^2} för $-1 \leq x \leq 1$ så att felets absolutbelopp blir mindre än 10^{-2} för alla dessa x.

P 8.38 Låt p_1 vara Maclaurinpolynomet av ordning 1 till $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + 3(x+2)\ln\dfrac{x+2}{2}$.

(a) Bestäm p_1. (b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_1(x)}{x^2}$.

(c) Visa att $(\sqrt{3}-1)x^2 \leq f(x) - p_1(x) \leq x^2$ för alla $x \in [-1, 1]$.

P 8.39 Räkna ut ett närmevärde till $\sqrt[5]{33}$ med ett fel av högst 10^{-3}.

P 8.40 I relativitetsteorin talar man om en partikels vilomassa m_0, relativistiska massa m och energi E. Kopplingen är

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2},$$

där v är partikelns hastighet och c är ljushastigheten. (De två termerna i approximationen kallas vilo- respektive rörelseenergi.)

(a) Motivera approximationen. För vilka v är den bra?

(b) Uppskatta felet i approximationen då $|v| \leq c/10$ (vilket är ca 30.000 km/s).

P 8.41 Bestäm ett bråktal C sådant att $0 \leq \cosh x - 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq Cx^4$ för alla $x \in [-1, 1]$.

P 8.42 Man vill beräkna $\ln 2$ numeriskt med hjälp av Maclaurinutveckling. Att använda utvecklingen för $\ln(1+x)$ med $x = 1$ är en dålig metod (varför?), så i stället utvecklar man

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x), \qquad |x| < 1,$$

och väljer sedan x lämpligt. Approximera $\ln 2$ med ett fel vars belopp är högst 10^{-4}.

9 Differentialekvationer

P 9.1 Betrakta (den homogena) differentialekvationen

$$(*) \qquad y' + 2xy = 0.$$

(a) Rita riktningsfältet (i punkterna $(x, y) = (m, n)$, där $m, n \in \{0, \pm1, \pm2\}$, räcker) och fundera över hur lösningskurvorna kan tänkas se ut.

(b) Bestäm en integrerande faktor och sedan alla lösningar till $(*)$. Rita denna kurvskara (d.v.s. rita ett antal representativa lösningskurvor).

(c) Bestäm den lösningskurva som går genom punkten $(1, 1)$.

P 9.2 Bestäm alla lösningar till de linjära differentialekvationerna

(a) $y' = 3y + x^2$ (b) $y' + 2xy = x$ (c) $y' + 3x^2y = x^2$

(d) $(1 + x^2)y' + 2xy = 2x$ (e) $xy' + 2y = \sin x,\ x > 0$ (f) $2xy' - y = 3x^2,\ x > 0$.

P 9.3 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $2xy' - y = 3x^2$, $x > 0$ (uppgift P 9.2f) sådana att (a) $y(1) = 0$ (b) $y'(4) = 0$ (c) $y(x) \geq y(1)$, $x > 0$ (d) $y(x) \leq y(1)$, $x > 0$.

P 9.4 Betrakta differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$ på intervallet $x > 0$.

(a) Bestäm en integrerande faktor och sedan alla lösningar till differentialekvationen i det angivna intervallet. Rita lösningssskaran.

(b) Bestäm den lösningskurva som går genom punkten $(2, -3)$.

P 9.5 Bestäm alla funktioner $y(x)$ sådana att $(x+1)y' - y = \ln x$, $x > 0$. Uppfyller någon av dessa villkoret $y'(x) \to 1$ då $x \to \infty$?

P 9.6 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $(x^2 + x)y'(x) - y(x) = \ln x$, $x > 0$.

P 9.7 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $(x^2 + x)y' - y = x^3 \cos x$, $x > 0$. Finns någon lösning som dessutom uppfyller villkoret att y/x^3 har ändligt gränsvärde då $x \to 0+$? Bestäm i så fall även denna lösning och tillhörande gränsvärde.

P 9.8 Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x}{1+x^2}, \qquad x > 0,$$

som har ett ändligt gränsvärde (vilket?) då $x \to 0$.

P 9.9 Lös differentialekvationen

$$y' - (\tan x)y = \cos^2 x, \qquad |x| < \pi/2.$$

Ange också den lösning som är udda, d.v.s. för vilken $y(-x) = -y(x)$, $|x| < \pi/2$.

P 9.10 (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{5x}{x^2+2x+5}, \qquad x > 0,$$

för vilken $\lim_{x\to\infty} y(x)/x^2 = 0$.

(b) Låt y vara lösningen i (a). Visa att $y(x) < 0$ för alla $x > 0$.

P 9.11 (a) En kropp med temperaturen $T(0) = 60$ grader placeras i ett rum med konstant temperatur $T_0 = 20$ grader. Efter 20 minuter är kroppens temperatur $T(20) = 40$ grader. Bestäm kroppens temperatur efter ytterligare 20 minuter. Vad händer då $t \to \infty$? Matematisk modell: Avsvalningshastigheten antas vara proportionell mot skillnaden mellan kroppens och omgivningens temperatur.

(b) En allmän situation: Låt begynnelsetemperaturen $T(0)$, den konstanta rumstemperaturen $T_0 < T(0)$ och kroppens temperatur $T(t_1)$ vid tiden $t = t_1 > 0$ vara givna, där $T_0 < T_1 < T(0)$. Bestäm då temperaturen $T(t)$ för $0 \le t < \infty$.

P 9.12 Bestäm alla kontinuerligt deriverbara kurvor genom origo sådana att normalen i en godtycklig punkt (a, b) på kurvan skär y-axeln i punkten $(0, b + 2)$.

P 9.13 Betrakta differentialekvationen

$$y' + g(x)y = h(x),$$

där g och h är kontinuerliga funktioner och $g(a) \neq 0$, där a är en given konstant. Till varje lösningskurva dras tangenten i lösningskurvans skärningspunkt med linjen $x = a$. Visa att alla dessa tangenter har en gemensam punkt, och bestäm denna.

P 9.14 Visa att $y = 2\ln x$ är en lösning till differentialekvationen $x(y' + e^y) = x^3 + 2$, $x > 0$.

P 9.15 Bestäm en lösning till differentialekvationen $y' + 4x^3y^2 = 0$ som är sådan att

(a) $y(1) = 1/2$ (b) $y(1) = 1$ (c) $y(1) = -1/15$ (d) $y(1) = 0$.

För vilka x existerar lösningarna?

P 9.16 Bestäm en lösning till differentialekvationen $x^2y' = y^2 + 2y + 1$ för vilken gäller

(a) $y(-1) = 1$ (b) $y(-1) = -1$.

P 9.17 Bestäm en lösning till differentialekvationen $y' = \dfrac{1+y}{x^2+x}$ som uppfyller kravet

(a) $y(-2) = 1$ (b) $y(1) = -1$ (c) $y(1) = -2$ (d) $y(-1/2) = 0$.

Rita lösningskurvorna!

P 9.18 Differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$, $x > 0$, från uppgift P 9.4a är också separabel. Lös den med separation och jämför med din tidigare lösning.

P 9.19 Bestäm en lösning till $y' = \cos^2 y$ för vilken $y(1) = \pi$. Rita lösingskurvan.

P 9.20 Bestäm en lösning till differentialekvationen $e^y(1 + y') = 1$ som uppfyller $y(0) = \ln 3$.

P **9.21** Bestäm en lösning till differentialekvationen $y' = xy^2 + x$, $y(0) = 1$. Rita lösningskurvan.

P **9.22** Bestäm en funktion $y(x)$ som uppfyller $(1 + x^2)^2 y' = xe^{2y}$ och $y(0) = \ln 2$.

P **9.23** Lös differentialekvationen $y' = \dfrac{y - y^3}{x^3 - x}$, $0 < x < 1$, med villkoret $y(1/2) = 1/2$.

P **9.24** Låt $y(x)$ vara lösningen till differentialekvationen

$$y' = 2x\sqrt{3 - 2y - y^2}, \qquad y(0) = 0.$$

För vilka reella konstanter a existerar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y(x) - ax^2}{x^4}$ ändligt? Beräkna också gränsvärdet.

P **9.25** Lös differentialekvationen

$$\frac{y'}{\sqrt{y+2}} = \frac{y+1}{1+x^2}, \qquad y(0) = -\frac{7}{4}.$$

Tips: Bestäm konstanten omedelbart när den dyker upp, och jämför gärna med vad som händer om du i stället bestämmer den på slutet.

P **9.26** (a) Den i uppgifterna P 9.4 och P 9.18 undersökta differentialekvationen $y' = 2y/x$, $x > 0$, har formen

$$y' = f\big(\frac{y}{x}\big),$$

där f är kontinuerlig (här är $f(t) = 2t$). Bestäm alla lösningar genom att först lösa den differentialekvation som den nya obekanta funktionen $z(x) = y(x)/x$ satisfierar.

(b) Lös differentialekvationen $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$, $y(1) = 1$. Lösningen får ges i implicit form.

P **9.27** Lös differentialekvationen $y' = (x+y)^2$, $y(0) = 1$ genom att först bestämma den differentialekvation som en ny obekant funktion $z(x) = y(x) + x$ uppfyller. I vilket största intervall omkring $x = 0$ existerar lösningen? Vad händer då x går mot detta intervalls ändpunkter?

P **9.28** Differentialekvationen $2xy' - y = 3x^2$, $x > 0$, i uppgift P 9.2f är också en så kallad Eulerekvation (se boken) och kan lösas genom att byta variabel: $t = \ln x$. Visa att ekvationen i den nya variabeln blir

$$2\frac{dy}{dt} - y = 3e^{2t},$$

och lös sedan ekvationen.

P **9.29** Lös integralekvationerna

(a) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x y(t)\,dt$ (b) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_x^4 y(t)\,dt$ (c) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^4 y(t)\,dt$.

P **9.30** Lös integralekvationen $x - y(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{2t\,y(t)}{1+t^2}\,dt$.

P **9.31** Antag att funktionen f är kontinuerlig och att y har kontinuerlig derivata för alla reella x. Visa att olikheten

$$y'(x) + f(x)y(x) \le 0 \qquad \text{för alla } x$$

är ekvivalent med olikheten

$$y(b) \le y(a)\exp\left(-\int_a^b f(t)\,dt\right) \qquad \text{för alla } a,\ b,\ b \ge a.$$

P **9.32** Bestäm alla deriverbara funktioner på hela $\mathbb{R}$ som där uppfyller

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (b) $f(x+y) = f(x)f(y)$.

P 9.33 (a) Beteckna med $y_1(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + f(x)y = g(x)$, $y(0) = C_1$ och med $y_2(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + f(x)y = g(x)$, $y(0) = C_2$, där f och g är kontinerliga funktioner definierade på hela reella axeln. Visa att

$$y_1(x) - y_2(x) = (C_1 - C_2)\exp\left(-\int_0^x f(t)\,dt\right).$$

(En liten ändring av begynnelsevärdet ger alltså på begränsade intervall en liten ändring av lösningen.)

(b) Beteckna med $y_1(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + y = g_1(x)$, $y(0) = A$ och med $y_2(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + y = g_2(x)$, $y(0) = A$, där högerleden g_1, g_2 är kontinerliga funktioner definierade på hela reella axeln och är sådana att skillnaden $g = g_1 - g_2$ är begränsad: $|g(x)| \le M < \infty$ för alla reella x. Visa olikheten

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le M|1 - e^{-x}|.$$

(En liten ändring av högerledet ger alltså på begränsade intervall en liten ändring av lösningen.)

P 9.34 Betrakta differentialekvationen

$$(*) \qquad xy' = 2y.$$

Visa följande:

(a) Om I är ett intervall som inte innehåller punkten $x = 0$, så ges alla lösningar till $(*)$ på I av $y = Cx^2$, C konstant. (Jämför med uppgift P 9.4a.)

(b) Om $y(x)$ är en lösning till $(*)$ på hela $\mathbb{R}$, så är $y(0) = 0$ och det finns konstanter A och B (som inte behöver vara lika) sådana att

$$y(x) = \begin{cases} Ax^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ Bx^2, & x < 0. \end{cases}$$

(c) Funktionerna i (b) är verkligen lösningar till $(*)$ på $\mathbb{R}$, d.v.s.: $y'(x)$ existerar för alla $x \in \mathbb{R}$ och $(*)$ är uppfylld för alla $x \in \mathbb{R}$.

(d) Genom varje punkt (a, b), där $a \neq 0$, går oändligt många lösningar till $(*)$ på hela $\mathbb{R}$.

P 9.35 Betrakta differentialekvationen

$$(**) \qquad xy' = y.$$

Visa följande (jämför med uppgift P 9.34):

(a) Om $0 \notin I$ så är $y(x)$ lösning till $(**)$ på intervallet I precis då $y = Cx$, C konstant.

(b),(c) $y(x)$ är lösning till $(**)$ på hela $\mathbb{R}$ precis då $y = Cx$, C konstant. (Det måste alltså vara samma konstant för $x > 0$ och för $x < 0$, varför?)

(d) Genom varje punkt (a, b), där $a \neq 0$, går precis en lösning till $(**)$ på hela $\mathbb{R}$.

P 9.36 Betrakta differentialekvationen

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Det är trivialt att för varje $a \in \mathbb{R}$ är $y = 0$ en lösning som går genom $(a, 0)$. Visa att även

$$y(x) = \begin{cases} (x - a_1)^3, & x < a_1, \\ 0, & a_1 \le x \le a_2, \\ (x - a_2)^3, & x > a_2, \end{cases}$$

där a_1, a_2 är konstanter sådana att $a_1 \le a \le a_2$, är lösningar som går genom $(a, 0)$. Finns det ännu fler sådana lösningar? Ange någon i så fall! (Allmänna frågor om existens och entydighet tas upp i kursen TATA71 Ordinära differentialekvationer och dynamiska system.)

P 9.37 Lös differentialekvationen (a) $y'' + 2y' + 5y = 0$ (b) $y'' + 2y = 0$.
Bestäm speciellt de lösningar som uppfyller villkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

P 9.38 Bestäm alla lösningar till differentialekvationerna
(a) $y' - 3y = 0$ (b) $y'' + 2y' = 0$ (c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ (d) $y^{(4)} - y'' = 0$.

P 9.39 Lös differentialekvationen $y^{(4)} = y$.

P 9.40 Bestäm den allmänna lösningen till $y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} + y' + y = 0$.

P 9.41 Visa att $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin x$ är en lösning till Bessels differentialekvation, d.v.s. till

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \big(1 - \frac{1}{4x^2}\big) y = 0, \qquad x > 0.$$

P 9.42 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = x^2 + 1$ som uppfyller villkoret $y(0) = 0 = y'(0)$.

P 9.43 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 3y' - 4y = e^x + 4x - 7$.

P 9.44 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+2y'+3y = 0$ som har ett lokalt extremvärde $y = 1$ i $x = 0$ och avgör på enklaste sätt om detta extremvärde är ett lokalt maximum eller minimum.

P 9.45 Bestäm y så att $y''(x) = 1/x$ för $x > 0$ och $y(x) \geq y(1) = 0$ för alla $x > 0$.
(Var noga med att visa att din lösning verkligen uppfyller olikheten.)

P 9.46 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y = \sin x - \cos x$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

P 9.47 Lös differentialekvationen $y''' + y'' + y' + y = x + 1 + \cos x$.

P 9.48 Lös differentialekvationen $y'' + y = h(x)$ då
(a) $h(x) = 6\cos 2x - 3\sin 2x$ (b) $h(x) = \cos x$ (c) $h(x) = \sin x$
(d) $h(x) = 6\cos x - 3\sin x$ (e) $h(x) = x\cos x$ (f) $h(x) = \cos x \sin x$

P 9.49 (a) Verifiera att $y = x^2 \ln x$ är *en* lösning till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x + 2x + 3$.
(b) Bestäm *alla* lösningar till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x + 2x + 3$.
(c) Bestäm alla lösningar till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x$.

P 9.50 Ange en differentialekvation som har den allmänna lösningen
(a) $y = Ae^{3x} + Be^{-4x}$ (b) $y = Ae^{3x} + Be^{-4x} - \cos x$
(c) $y = (A + x)e^x + (B + Cx)e^{-x}$ (d) $y = Ae^{-2x} + e^{-x}(1 + B\cos 3x + C\sin 3x)$.

P 9.51 Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' - 15y = e^{-3x} + 1$ som är begränsade på intervallet $x \geq 0$.

P 9.52 Betrakta differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 2\sin x$.

(a) Bestäm den lösningskurva som tangerar x-axeln i origo.

(b) Vilka lösningar har lokalt maximum för $x = 0$?

P 9.53 Betrakta differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = x + e^{-x}$.
(a) Bestäm den lösning som går genom origo och som har horisontell tangent där.
(b) Avgör om lösningen i (a) har extremvärde i origo.

P 9.54 Lös differentialekvationen $y^{(3)} - 3y' + 2y = \cosh x$.

P 9.55 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen i uppgift P 9.54 som har strängt lokalt maximum då $x = 0$ och som uppfyller $e^{2x}y(x) \to 0$ då $x \to -\infty$.

P 9.56 Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen $y''' + 2y'' + y' = (x+1)e^x$ som tangerar x-axeln i origo och där har andraderivatan lika med 0.

P 9.57 Har differentialekvationen $y'' - 4y' + 8y = xe^{2x}\sin 2x$ någon lösning som har lokalt extremvärde 1 för $x = 0$? Avgör i så fall om detta är ett lokalt maximum eller lokalt minimum och om lösningen har ett största eller minsta värde för $-\infty < x < \infty$.

P 9.58 Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = 5 - 2e^{-x} + 3e^{-2x}\cos 2x$.

P 9.59 (a) Betrakta differentialekvationen

$$(*) \qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x),$$

där funktionerna a, b, f är kontinuerliga. Eftersom koefficienterna inte är konstanta duger inte de tidigare framtagna lösningsmetoderna. Följande fungerar dock:
Antag att man har funnit en lösning $y = v(x)$ till den *homogena* ekvationen

$$(*_h) \qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

(en sådan kan man ofta finna i serieform). Gör i $(*)$ ansatsen $y = v \cdot z$, härled differentialekvationen för den nya obekanta funktionen z och ange hur den kan lösas.

(b) Lös differentialekvationen i uppgift P 9.41 genom att tillämpa ovanstående metod.

P 9.60 (a) Visa att varje homogen linjär differentialekvation av ordning 3 med konstanta reella koefficienter har minst en lösning av formen $y = e^{cx}$, c reell.

(b) Hur generaliseras detta till ekvationer av godtycklig ordning?

(c) Visa att varje lösning till den linjära differentialekvationen $P_n(D)(y) = 0$ med konstanta koefficienter har gränsvärdet 0 då $x \to +\infty$ om och endast om alla rötter till den karakteristiska ekvationen har realdel < 0.

(d) Hur ser villkoret på den karakteristiska ekvationens rötter ut om "har gränsvärdet 0 då $x \to +\infty$" byts mot "är begränsad då $x \to +\infty$"?

P 9.61 Betrakta de två differentialekvationerna
(1) $y'' + (\cos x)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (2) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
För små värden på variabeln x skiljer sig de båda differentialekvationerna endast lite från varandra, och man kan då förmoda att deras lösningar har samma egenskap. Vilken är den första termen i Maclaurinutvecklingen av lösningen till (1) som skiljer sig från motsvarande i (den kända) Maclaurinutvecklingen av lösningen till (2)? Att lösningen till (1) har Maclaurinutveckling av godtycklig ordning får användas utan bevis.

10 Serier och generaliserade integraler

P 10.1 Låt $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + x^3}$.

(a) Motivera varför olikheterna $0 \le f(x) \le 1/\sqrt{x}$ och $0 \le f(x) \le 1/x^3$ gäller för alla $x > 0$. Skissa graferna för $f(x)$, $1/\sqrt{x}$ och $1/x^3$ i samma koordinatsystem, och markera speciellt deras inbördes lägen då $0 < x < 1$ respektive $x > 1$.

(b) Vilka uppskattningar av $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ följer av olikheterna $0 \le f(x) \le 1/\sqrt{x}$? Vilken eller vilka av dessa uppskattningar är användbara?

(c) Vilka uppskattningar av $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ följer av olikheterna $0 \le f(x) \le 1/x^3$? Vilken eller vilka av dessa uppskattningar är användbara?

(d) Vilken bästa uppskattning av $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ får vi från ovanstående deluppgifter?

P 10.2 Låt $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}$.

(a) Förvissa dig om att olikheterna $0 \le x^3 \le \sqrt{x}$ gäller då $0 < x < 1$. Visa sedan att

$$0 \le \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1+x}{\sqrt{x}}, \qquad 0 < x < 1,$$

och uppskatta $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ med hjälp av dessa olikheter.

(b) Förvissa dig om att olikheterna $x^3 \ge \sqrt{x} \ge 0$ gäller då $x > 1$. Visa sedan att

$$0 \le \frac{1+x}{2x^3} \le f(x) \le \frac{1+x}{x^3}, \qquad x > 1,$$

och uppskatta $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ med hjälp av dessa olikheter.

(c) Vilken instängning $A \le \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx \le B$ får vi från (a) och (b)?

P 10.3 Visa att (a) $0 \le \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4} \le \frac{1}{3}$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \le \frac{4}{3}$ (c) $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}+|\sin x|} \le 3$

(d) $\dfrac{3}{4} \le \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+|\cos x|} \le 1$ (e) $\ln 2 \le \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x+e^x} \le 1$ (ledning: $e^x \ge 1+x$)

P 10.4 Låt $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^4+1}$. Vi ska undersöka $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

(a) Låt $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^4}$. Visa att $0 \le f(x) \le g(x)$ då $x > 1$ och att $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = \frac{7}{3}$.

(b) Kan vi med hjälp av (a) avgöra om $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

(c) Låt nu $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Visa att $f(x) \ge g(x) \ge 0$ då $x > 1$ och att $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = 1$.

(d) Kan vi med hjälp av (c) avgöra om $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

(e) Låt $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ igen. Visa att att $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 2$ då $x \to \infty$, att $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = 1$, och att $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx$ är generaliserade endast i ∞.

(f) Kan vi med hjälp av (e) avgöra om $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

P 10.5 Låt $f(x) = \dfrac{1}{x+\sin x}$. Vi ska undersöka $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

(a) Låt $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Visa att $0 \le f(x) \le g(x)$ då $0 < x < 1$ och att $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent.

(b) Kan vi med hjälp av (a) avgöra om $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

(c) Låt nu $g(x) = \dfrac{1}{2x}$. Visa att $f(x) \ge g(x) \ge 0$ då $0 < x < 1$ och att $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent. (Som bekant är $0 \le \sin x \le x$ då $0 \le x \le \pi$.)

(d) Kan vi med hjälp av (c) avgöra om $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

(e) Låt $g(x) = \dfrac{1}{x}$ igen. Visa att $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to 0^+$, att $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent, och att $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ är generaliserade endast i 0.

(f) Kan vi med hjälp av (e) avgöra om $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

P 10.6 Visa att $\displaystyle\int_\pi^b \frac{\cos x}{x}\,dx = \frac{\sin b}{b} + \int_\pi^b \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ för alla $b > \pi$, och visa sedan med hjälp av detta samband att $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ är konvergent.

P 10.7 Om serierna $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty b_k$ båda är konvergenta, så är som bekant även serien $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty (a_k+b_k)$ konvergent, men vad kan sägas om konvergensen hos $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty (a_k+b_k)$ om

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k$ är konvergent men $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty b_k$ är divergent?

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty b_k$ båda är divergenta?

P 10.8 Vi ska undersöka den positiva serien $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \bigl(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\bigr)$.

(a) Beräkna delsummorna s_n, $n \ge 2$, och visa med hjälp av dem att serien är divergent.

(b) Klarar Divergenstestet att visa att serien är divergent?

P 10.9 Betrakta den positiva serien $s = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, där $a_k = \dfrac{2^k}{5^k + 10^k}$.

(a) Genom att använda att $5^k \ge 0$, visa att $s \le 5/4$.

(b) Vilken övre gräns för s får man om man i stället använder att $10^k \ge 5^k$ då $k \ge 0$?

(c) Visa på enklast möjliga sätt att $s > 5/8$.

(d) Visa att felet i approximationen $s \approx a_0 + a_1 + a_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{4}{125}$ är högst $\dfrac{1}{100}$.

P **10.10** (a) Beräkna $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x^2+2x}$ för $b>1$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+2k}$ för $n=1,2,3,\ldots$

(b) Använd (a) för att räkna ut $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k}$. Notera att de blir olika!

(c) Illustrera med areor i en figur varför det är uppenbart att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k} \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$.

(d) Rita en ny figur som illustrerar olikheten $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$.

(e) Rita en figur som illustrerar olikheten $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k} \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$. Är den användbar?

P **10.11** Låt $f(x) = \dfrac{x}{(12+x^2)^2}$ och sätt $a_k = f(k) = \dfrac{k}{(12+k^2)^2}$.

(a) Rita kurvan $y=f(x)$ för $x \geq 0$. Notera speciellt var f är avtagande.

(b) För vilket minsta heltal $n \geq 1$ kan man i en figur se att $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k \geq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$?

(c) För vilket minsta heltal $m \geq 1$ kan man i en figur se att $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$? (Samma n som i (b).)

(d) Använd (b) och (c) för att finna tal A_1 och A_2 sådana att $A_1 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq A_2$.

P **10.12** Studera serien $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$, där $a_k = (-1)^k \dfrac{\ln k}{\sqrt{k}}$.

(a) Visa att $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ inte är absolutkonvergent, d.v.s. att $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} |a_k|$ är divergent.

(b) Bestäm ett heltal $n \geq 3$ sådant att $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ är en Leibnizserie, och motivera sedan att $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ är konvergent. Ledning: Studera $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ för $x \geq 3$, så att $|a_k| = f(k)$.

P **10.13** Visa att $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ *inte* är absolutkonvergent genom att först visa att

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

(Den är dock konvergent, och man kan med komplex analys visa att värdet är $\pi/2$.)

P **10.14** (a) Lös differentialekvationen $y'' = y$ med bivillkoren $y(0)=1$, $y'(0)=0$, på samma sätt som i uppgift P 9.37 (inte med potensserier). Hur många funktioner löser detta problem?

(b) Verifiera att potensserien $y = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ har oändlig konvergensradie och löser problemet i (a). Använd detta för att beräkna potensseriens summa.

(c) Beräkna på liknande sätt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ och $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Svar

Reella och komplexa tal

P 1.1 (a) $a^2 + a - b - 1$ (b) $4x^2 - 7x + 6$

P 1.2 $\dfrac{3}{26}$ respektive $\dfrac{96}{13}$

P 1.3 (a) Mgn $= 420$, summa $= \dfrac{2}{15}$ (b) Mgn $= (x^2+1)(x+1)(x-1)$, summa $= \dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$

P 1.4 0

P 1.5 $a^2 - 4ab + 6ac + 4b^2 - 12bc + 9c^2$

P 1.6 (a) $x(x-1)(x+1)$ (b) $3xy^2(x-2y^2)(x+2y^2)(x^2+4y^4)$

P 1.8 (a) $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$, minsta värde $= \dfrac{3}{4}$ antas för $x = -\dfrac{5}{2}$. Största värde saknas.

(b) $\dfrac{15}{2} - 2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$, största värde $= \dfrac{15}{2}$ antas för $x = \dfrac{3}{2}$. Minsta värde saknas.

P 1.9 $a = 2$, $b = 1/2$: alla $x \neq 1/2$ är lösningar; $a = 2$, $b \neq 1/2$: lösning saknas;
$a \neq 0$, $a \neq 2$, $b = 1/a$: lösning saknas; $a \neq 0$, $a \neq 2$, $b \neq 1/a$: $x = (1-2b)/(a-2)$;
$a = 0$, $b \in \mathbb{R}$: $x = b - 1/2$.

P 1.10 (a) $x = -1$ (b) $x = 0$, $x = 1$

P 1.11 $x = \dfrac{a+1}{a-3}$ om $a \neq 3$ och $a \neq 1$, ingen lösning om $a = 3$ eller $a = 1$

P 1.12 $x = \pm\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

P 1.13 $a < \dfrac{81}{4}$

P 1.14 (a) $x = a$, $x = b$

(b) $x = a/b$, $x = b/a$ om $a \neq 0$ och $b \neq 0$;
$x = 0$ om $a \neq 0$ och $b = 0$ eller $a = 0$ och $b \neq 0$;
alla reella tal x om $a = b = 0$

P 1.15 16

P 1.16 (a) Ja, på linjen $y = -\dfrac{3x}{2} + \dfrac{5}{2}$ (b) Nej

P 1.17 En cirkel med medelpunkt $(2, 0)$ och radie 2

P 1.18 Medelpunkt $\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$, radie $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$, om $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Punkten $\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$, om $a^2 + b^2 - 4c = 0$, ingenting om $a^2 + b^2 - 4c < 0$.

P 1.19 (a) $x = -1$ (b) $x = 0$ och $x = -2$ (c) Lösning saknas

P 1.20 (a) $x = 1$ (b) ingen lösning (c) $x = -1$, $x = 3$

P **1.21** (a) Ingen reell lösning (b) $x = -3 \pm \sqrt{65}$

P **1.22** $1 \leq x \leq 2$

P **1.23** (a) $1 - \dfrac{2}{x^2+1}$ (b) $x^3 + x^2 + x + 1$ (c) $\dfrac{-3x+5}{x^2-7}$ (d) $x^2 - 2x + 3 + \dfrac{-2x+10}{x^2+4x+5}$

P **1.24** (a) $x^2 + 4x - 5 - \dfrac{7}{x-3}$ (b) $x - 5 + \dfrac{5-3x}{x^2-3x+1}$

P **1.25** (a) 0 (b) $2^{100} - 2^{67} - 2^{32} + 2^{10} + 1$ (c) $1 - x$

P **1.26** (a) $(x-7)(x+9)$ (b) $(x-1)(x-3)^2$

P **1.27** (a) Ja (b) Nej

P **1.28** (a) $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$ (b) $x = 2$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$
(c) $x = 2$, $x = 3$, $x = -5$ (d) $x = -1$, $x = 2$, $x = -1 \pm \sqrt{6}$

P **1.30** $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = b$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c$

P **1.31** (a) $x = -4$, $x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (b) $x = \dfrac{3}{4}$

P **1.32** $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $y = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $x = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

P **1.33** (a) $x < 3/2$ (b) $x < 4$ (c) $x \geq 1$ eller $x < -1$
(d) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ (e) $x \geq \sqrt{5}$ eller $x \leq -\sqrt{5}$ (f) $1 \leq x \leq 3$

P **1.34** Minsta värdet är $-\dfrac{5}{4}$ för $x = \dfrac{3}{2}$

P **1.35** (a) Likhet då $x = 1$ (b) Likhet då $x = y$

P **1.36** Största värdet är 25 då båda talen är 5 (kvadratkomplettering)

P **1.37** (a) t.ex. $1 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 2$ (b) t.ex. $3 - (x+2)^2 = -x^2 - 4x - 1$

P **1.38** (a) $x \neq 5$ (b) $x > 3/2$, $0 < x < 1$ eller $x < -2$ (c) $x \geq 2$ eller $x < 0$
(d) $x \geq 2$ eller $x = -1$ (e) $x \leq 4$ (f) $x > 1$ eller $x < 0$

P **1.39** (a) $x < -2$ eller $-1/2 < x < 1$ (b) $-3 < x \leq -1$ eller $-1/2 < x \leq 7$
(c) $x < -4$, $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 2$ (d) $-1/3 \leq x < 1/2$ eller $1 \leq x < 2$

P **1.40** (a) $a = 2$, $b = 1$ (b) $a = 1$, $b = 2$ (c) $a = b = 1$ (d) Inga värden på a, b duger

P **1.41** (a) T.ex. $\omega = 10$. (Alla $\omega > 10$ duger också.)
(b) T.ex. $\omega = 1/\sqrt{\epsilon}$. (Alla $\omega > 1/\sqrt{\epsilon}$ duger också.)

P **1.42** $0 \leq x \leq 1/\sqrt{8}$

P **1.43** (a) 1 (b) 17 (c) $\dfrac{1}{72}$ (d) $\dfrac{81}{64}$ (e) $\dfrac{81}{64}$

P **1.44** (a) $x = -5$ och $x = 1/3$ (b) $x = 4$ (c) $x = -3$ och $x = 5/2$

P **1.45** (a) $x = -1$, $x = -7/3$ (b) $x = -2$, $x = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$

P **1.46** (a) $-2 < x < 4$ med $x \neq 1$ (b) $x \leq 1$ med $x \neq -1$
(c) $\sqrt{2} < x < \sqrt{6}$ eller $-\sqrt{6} < x < -\sqrt{2}$ (d) $x < -1$ eller $x > 1$

P **1.47** Ledning: $|x - a| < d \iff a - d < x < a + d$. Rita en tallinje för att se detta.

P **1.48** (a) $(|x| \leq 1 \iff x^2 \leq 1)$ (b) $(|x| \leq 1 \Rightarrow \left|x^3\right| \leq x^2)$

P **1.49** (a) $x = -2 + \sqrt{7}$, $x = -1$, $x = -3$

(b) Ingen lösning om $a > 0$, alla $x \geq 0$ om $a = 0$, $x = -a/2$ om $a < 0$

P **1.50** $c = 2$ ger lösningarna $-1/2, 0$ och 1.

P **1.51** (a) $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 = 256$ (b) $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = k$ (k termer)

P **1.52** (a) T.ex. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^3$ (b) T.ex. $\displaystyle\sum_{k=3}^{49} \frac{1}{2k+1}$ (c) T.ex. $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

P **1.53** Ledning: Skriv ut termerna i summorna.

P **1.54** Aritmetiska summor, bestäm första och sista termen och antalet termer.

(a) $\dfrac{(n-1)n}{4}$ (b) $\dfrac{(n-m+1)(3m+3n+2)}{2}$ (c) 0

P **1.55** Geometriska summor, bestäm första termen, kvoten och antalet termer.

(a) $3 - \dfrac{1}{3^n}$ (b) $\dfrac{4(2^{99}+1)}{3}$

P **1.56** $n > \dfrac{\ln 11}{\ln 1{,}1} - 1 \approx 24{,}16$ $\left(\dfrac{(1{,}1)^{n+1} - 1}{1{,}1 - 1} > 100\right)$

P **1.58** Första term $32/3$, kvot $1/2$ eller första term 32, kvot $-1/2$

P **1.59** (a) $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2n)$ (b) $2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot \ldots \cdot 2^{-100} = 2^{0-1-2-\cdots-100} = 2^{-5050}$

(c) $\dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+1}{n} = n + 1$

P **1.60** $\displaystyle\prod_{k=2}^{19} (-1)^k k$

P **1.61** $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$

P **1.62** (a) 210 (b) 715 (c) $\dfrac{n(n^2-1)}{6}$

P **1.64** (a) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

(b) $16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$

(c) $64x^{12} - 192x^9 + 240x^6 - 160x^3 + 60 - \dfrac{12}{x^3} + \dfrac{1}{x^6}$

P **1.65** Endast för $x = -3$

P **1.66** (a) $2 + 6i$ (b) $4 - 2i$ (c) $3 - 12i$ (d) -1 (e) 2

(f) $-1 - 4i$ (g) $-11 + 10i$ (h) $\sqrt{13}$ (i) $\dfrac{5}{17} - \dfrac{14}{17}i$

P **1.67** $|z|^2 = |z^2| = 13$, $z^2 = -5 + 12i$

P **1.68** $3/25$ resp $-4/25$

P **1.70** Ledning: Studera $|zw|^2$.

P **1.71** $i^0 = 1$, $i^{-1} = -i$, $i^{-2} = -1$, $i^{-3} = i$, $\ldots$,

$i^{-4k} = 1$, $i^{-(4k+1)} = -i$, $i^{-(4k+2)} = -1$, $i^{-(4k+3)} = i$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

P **1.72** (a) $z^{-1} = i$, $z^{-2} = -1$, $z^{-3} = -i$ (b) $z^{-1} = \dfrac{1+i}{2}$, $z^{-2} = \dfrac{i}{2}$, $z^{-3} = \dfrac{-1+i}{4}$

(c) $z^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$, $z^{-2} = \dfrac{a^2 - b^2 - 2iab}{(a^2+b^2)^2}$, $z^{-3} = \dfrac{a^3 - 3ab^2 + i(b^3 - 3a^2b)}{(a^2+b^2)^3}$

P 1.73 (a) $z = 4 + 4i$ (b) $z = 1 - \dfrac{i}{7}$ (c) $z = 2 - i$ (d) $z = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i$ (e) $z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}i$

P 1.74 z ligger längst från origo

P 1.75 (a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{1}{5^6}$

P 1.77 $x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$,
där x och y har samma tecken om $b > 0$, motsatta tecken om $b < 0$

P 1.78 $z_{1,2} = \pm(3 - 2i)$

P 1.79 (a) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 + i$ (b) $z_1 = i$, $z_2 = 1 + 2i$

P 1.80 $z^2 + (2b - a^2)z + b^2 = 0$

P 1.81 $p(z) = (z^2 + 1)(5z + 3)$

P 1.82 $z_{1,2} = 2 \pm i$, $z_{3,4} = -1 \pm 2i$

P 1.83 $p(z) = (z-1)^3\left(z + \dfrac{3 + i\sqrt{15}}{2}\right)\left(z + \dfrac{3 - i\sqrt{15}}{2}\right) = (z-1)^3(z^2 + 3z + 6)$

P 1.84 $a_0 = 5$, $a_1 = -4$, $a_2 = 11$, $a_3 = -8$, $a_4 = 7$, $a_5 = -4$

P 1.85 $z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, $z_3 = 1/2$, $z_4 = -6$

P 1.86 $z_{1,2} = 1 \pm 2i$, $z_{3,4} = \pm i\sqrt{7}$

P 1.87 (a) $z_{1,2,3,4} = \pm 2 \pm i$ (b) $z_k = \sqrt[6]{2}\exp i(\pm\pi/12 + 2k\pi/3)$, $k = 0, 1, 2$

P 1.88 $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm(1+i)\sqrt{3}$, $z_{4,5} = \pm(1+i)/\sqrt{3}$

P 1.89 $a = 2$, nollställen $\pm i$, $-1 \pm i$

P 1.90 $z^6 - 3z^4 + 4$ (eller en rationell multipel därav)

P 1.91 $a = 1$, rötter 0, $1 - i$, $-1 - i$, $-2i$; $a = -4$, rötter ± 1, $\pm 1 - 2i$

Funktioner

P 2.1 (a) Ja, $g^{-1}(x) = f^{-1}(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$ (b) Ja, $g^{-1}(x) = f^{-1}\Big(\dfrac{1}{x} - 1\Big)$, $x \neq 0$ i $\mathbb{R}$
(c) Nej, g är inte injektiv, ty $g(-x) = g(x)$
(d) Nej, g är inte injektiv, ty $g(x_1) = g(x_2)$ om $f(x_1) = -f(x_2)$

P 2.2 (a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 2

P 2.3 $f^{-1}(y) = \ln(1 - y^2)$, $D_f =]-\infty, 0] = V_{f^{-1}}$, $D_{f^{-1}} = [0, 1[= V_f$

P 2.4 (a) $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$, $1 \le y \le 9$ (b) $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{för } 1 \le y \le 4 \\ -\sqrt{y} & \text{för } 9 \le y \le 16 \end{cases}$

P 2.5 $c = 1$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ med $ab \neq 1$ eller $c = -1$, $a = b = 0$

P 2.6 $D_f =]-\infty, -2[\cup [-1, \infty[$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{x^2 - 1}$

P 2.7 (a) $\ln 16 = \ln 2^4 = 4\ln 2$ (b) $\ln 18$ (c) $\ln 1 = 0$

P 2.8 $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 < 2\ln 11 < 3\ln 5 < \ln 7 + 2\ln 6 - \ln 2 < 7\ln 2$

P **2.9** (a) $\ln x^{-1} = -\ln x$ (b) $\ln \dfrac{27}{4}$

P **2.10** (Se på $\ln x_2 - \ln x_1$)

P **2.11** (a) Hur förskjuts ln-funktionens graf? (b) Förenkla, $y = -\ln x$

P **2.12** (a) $D_f =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$, $V_f = \mathbb{R}$ (b) $D_f = \left[2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\right]$

P **2.13** (a) $D_f =]3, \infty[$

(b) Omskrivningen $\sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)} = \sqrt{\ln(1-x) - \ln(3-x)}$ är felaktig, men omskrivningen $\sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)} = \sqrt{\ln(x-1) - \ln(x-3)}$ är korrekt. Varför?

P **2.14** (a) t.ex. $x = y = 1$ (b) $y = \dfrac{x}{x-1}$ för $x > 1$

P **2.15** $\dfrac{a+b}{2}$ $\left(\ln 3 = \dfrac{3b-a}{8},\quad \ln 2 = \dfrac{3a-b}{8}\right)$

P **2.16** (a) $e^x e^y = 4$ (b) $e^x e^x = 2$ (c) 16

P **2.17** $x = \dfrac{1}{2}\big(3 - \ln(e^3 - 1)\big)$

P **2.19** (a) e^x (b) e^{x+y} (c) 22/3 (d) $\sqrt{x^2-1}$, $x > 1$ (e) $2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$

P **2.20** $D_f = [0, \ln 2[$, $f^{-1}(t) = \ln(2t^2+1) - \ln(t^2+1)$

P **2.24** (a) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (b) 4

P **2.25** (a) $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (b) $x = -\dfrac{3}{2}$ (c) Ingen reell lösning

P **2.26** $D_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{4-3x}{x-1}$

P **2.27** (a) $D_f =]-1, 5/2[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{5e^y - 1}{2e^y + 1}$ (b) $D_f =]-\infty, 1[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 2}{e^y - 1}$

P **2.28** (a) $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{\dfrac{21}{4} - x}\right)$ (b) Invers saknas ty $g(0) = g(\ln 2) = 5$ (t.ex.)

P **2.29** 10

P **2.30** (a) $D_f = [0, 2]$ (b) $D_f =]-\infty, 0]$

P **2.31** (a) Ja, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^{1/e}$, $x \geq 0$.
(b) Nej, f är inte injektiv, ty t.ex. är $f(1/4) = f(3/4)$.

P **2.32** (a) 2^{2x+y} (b) 3^{2x}

P **2.33** ($y > {}^2\log 1000 \Leftrightarrow 1000 < ?$)

P **2.34** (a) $f^{-1}(x) = \ln\big(2 + \sqrt{x+4}\big)$, (b) $D_{f^{-1}} = V_f = [-4, +\infty[$, $V_{f^{-1}} = D_f = [\ln 2, +\infty[$

P **2.35** (a) $x = \dfrac{\sqrt{9+4e} - 3}{2}$ (b) $x = \dfrac{\ln 3 + \ln 2}{2\ln 3 - 3\ln 2} = \dfrac{\ln(6)}{\ln(9/8)}$

P **2.36** (a) $0 < x < e^{-1}$ eller $x > 1$ (b) $x > 0$ med $x \neq 1$

P **2.37** $x = 1/6$

P **2.40** (a) $\exp\left(\dfrac{3}{1+x^2}\right)$ (b) x^3 (c) $\dfrac{1}{1+e^{6x}}$ (d) $\dfrac{1}{1+\ln^2 x}$

(e) $3x$ (f) $-\ln(1+x^2)$ (g) $\exp\left(\dfrac{3}{1+\ln^2 x}\right)$ (h) $\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$

(i) $\dfrac{1}{1+x^6}$ (j) $\dfrac{1}{1+9x^2}$ (k) $\dfrac{3}{1+x^2}$ (l) $-\ln(1+e^{6x})$

P **2.41** (a) T.ex. $f(x)=e^x$ och $g(x)=-x^2$
(b) T.ex. $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=x^2$ och $h(x)=\cos x$

P **2.42** (a) Ja (b) Nej, motexempel $f(x)=g(x)=x$ (c) Ja (d) Ja, nej respektive nej

P **2.43** (a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ resp $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ resp $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ resp $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(d) 0 resp -1 (e) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ resp $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ resp $-\dfrac{1}{2}$

P **2.44** (a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

P **2.45** $(-1)^n$

P **2.46** (a) $v=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\quad v=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$ (b) $v=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$ (c) $v\in\mathbb{R}$

P **2.47** (a) $v=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$ (b) $v=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$

P **2.48** (a) $-\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{6}$ (b) $-\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}$

P **2.50** (a) $\tan 0=\cot\dfrac{\pi}{2}=0,\quad \tan\dfrac{\pi}{4}=\cot\dfrac{\pi}{4}=1$

(b) $\tan\dfrac{\pi}{6}=\cot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad \tan\dfrac{\pi}{3}=\cot\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

P **2.51** (a) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ resp $-\sqrt{3}$ (b) Båda -1 (c) Odefinierat resp 0 (d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ resp $\sqrt{3}$

P **2.52** $u=v+\pi n$ (n heltal) (både (a) och (b))

P **2.53** (a) $v=\dfrac{\pi}{6}+\pi n$ (b) $v=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$ (c) $v=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$ (d) $v=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$ (n heltal)

P **2.54** -18

P **2.55** Diskutera dina figurer med läraren

P **2.56** $\sqrt{13}$

P **2.57** $u+v=\dfrac{3\pi}{4}$

P **2.58** $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\quad x=\pi+2\pi n$

P **2.59** (b) $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$, $-\pi<x<\pi$

P **2.60** $u+v=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$ (n heltal)

P **2.61** Alla vinklar är $\dfrac{\pi}{3}$ (liksidig triangel)

P **2.62** 1

P 2.63 T.ex. $z_1 = 1\,e^{i0}$, $z_2 = 13\,e^{i\pi}$, $z_3 = 1\,e^{i\pi/2}$, $z_4 = \sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}$, $z_5 = 2\,e^{i2\pi/3}$, $z_6 = 3\,e^{i4\pi/5}$.

P 2.64 (a) T.ex. $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$. (b) $r^5 e^{i5v} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$. (c) $r^5 = 4$ och $5v = \dfrac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
(d) $r = 2^{2/5}$ och $v = \dfrac{2\pi}{15} + n\cdot\dfrac{2\pi}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. (e) $z = i + 2^{2/5} e^{i\left(\frac{2\pi}{15} + n\cdot\frac{2\pi}{5}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (t.ex.)

P 2.65 (a) $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i2\pi/9}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i8\pi/9}$, $z_3 = \sqrt[3]{2}e^{i14\pi/9}$
(b) $z_k = \sqrt[6]{2}\exp i(\pi/36 + 2k\pi/3)$, $k = 0, 1, 2$

P 2.66 $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, n heltal. $\left(e^{ix} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
Ledning för första delen: Studera real- och imaginärdel till den komplexa ekvationen.

P 2.67 $\operatorname{Re} w = e^{2x}\sin x$, $\operatorname{Im} w = e^{2x}\cos x$

P 2.68 $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$

P 2.70 $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \Rightarrow (1+i)^n = 2^{n/2}\,e^{in\pi/4}$, som kan skrivas som
$2^{n/2}$ då $n = 8k$; $2^{n/2}(1+i)/\sqrt{2} = 2^{(n-1)/2}(1+i)$ då $n = 8k+1$;
$2^{n/2}i$ då $n = 8k+2$; $2^{n/2}(-1+i)/\sqrt{2} = 2^{(n-1)/2}(-1+i)$ då $n = 8k+3$;
$-2^{n/2}$ då $n = 8k+4$; $2^{n/2}(-1-i)/\sqrt{2} = 2^{(n-1)/2}(-1-i)$ då $n = 8k+5$;
$-2^{n/2}i$ då $n = 8k+6$; $2^{n/2}(1-i)/\sqrt{2} = 2^{(n-1)/2}(1-i)$ då $n = 8k+7$;
$k = 0, 1, 2, \ldots$.

P 2.71 $a = \dfrac{1+2i}{5}$, $b = \dfrac{2+14i}{25}$,

$$\operatorname{Re}\ (ax+b)\,e^{(1+i)x} = e^x\left(\left(\frac{x}{5} + \frac{2}{25}\right)\cos x - \left(\frac{2x}{5} + \frac{14}{25}\right)\sin x\right),$$

$$\operatorname{Im}\ (ax+b)\,e^{(1+i)x} = e^x\left(\left(\frac{2x}{5} + \frac{14}{25}\right)\cos x + \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{25}\right)\sin x\right)$$

P 2.72 (a) $\arcsin 0 = 0$, $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$ (b) $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, $\arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$
(c) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$
(d) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$
(e) $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$ (f) ej definierat

P 2.73 (a) 0 (b) $\dfrac{\pi}{6}$ (c) $-\dfrac{\pi}{4}$ (d) $-\dfrac{\pi}{3}$

P 2.74 $\pi + \arctan 2$

P 2.75 (a) $-\dfrac{\pi}{7}$ (b) $\dfrac{3\pi}{5}$ (c) $\dfrac{\pi}{5}$

P 2.76 $2R\sin\alpha$

P 2.77 (a) injektiv $\Rightarrow$ ej jämn
(b) växande $\Rightarrow$ ej strängt avtagande
(c) strängt växande $\Rightarrow$ ej avtagande, ej strängt avtagande, ej jämn
(d) avtagande $\Rightarrow$ ej strängt växande
(e) strängt avtagande $\Rightarrow$ ej växande, ej strängt växande, ej jämn
(f) monoton är förenlig med alla!
(g) strängt monoton $\Rightarrow$ ej jämn
(h) uppåt begränsad är förenlig med alla!
(i) nedåt begränsad är förenlig med alla!
(j) begränsad är förenlig med alla!
(k) jämn $\Rightarrow$ ej injektiv, ej strängt växande, ej strängt avtagande, ej strängt monoton
(l) udda är förenlig med alla!

P 2.78
(a) $\sin v = \dfrac{1}{3}$ $\cos v = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ $\tan v = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(b) $\sin v = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ $\cos v = \dfrac{2}{3}$ $\tan v = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(c) $\sin v = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\tan v = 2$

(d) $\sin v = -\dfrac{1}{3}$ $\cos v = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ $\tan v = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(e) $\sin v = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ $\cos v = -\dfrac{2}{3}$ $\tan v = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(f) $\sin v = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\tan v = -2$

P 2.79 $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{8}}{6}}$

P 2.80 (a) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $-\dfrac{\pi}{6} + n\pi$, n heltal (c) T.ex. $0 < \alpha + \beta < \pi$ (d) $\dfrac{5\pi}{6}$

P 2.81 (a) t.ex. $\sqrt{27} + 13i$, $1 + i\sqrt{48}$, $-\sqrt{3} + i$ (b) $\dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$, n heltal

(c) t.ex. $0 < \alpha + \beta < \pi$ (d) $\dfrac{5\pi}{6}$

P 2.82 (a) π (b) $\pi + \arctan(3/5)$

P 2.83 $f^{-1}(x) = \sqrt{-\ln\left(\dfrac{\pi}{2} + \arctan x\right)}$

P 2.84 $f(x) = \begin{cases} -(\pi + 2x), & x \in [-\pi, -\pi/2], \\ 0, & x \in [-\pi/2, 0], \\ 2x, & x \in [0, \pi/2], \\ \pi, & x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$ Funktionen g är periodisk med perioden 2π.

P 2.85 (b) $x = \sqrt[4]{3/4}$

P 2.86 (a) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ (b) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

P 2.87 $\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $D_{\tanh} = V_{\tanh^{-1}} = \mathbb{R}$, $V_{\tanh} = D_{\tanh^{-1}} =]-1, 1[$

P 2.88 $\tanh^{-1}(v) = \tanh^{-1}(v_1) + \tanh^{-1}(v_2)$

P 2.89
(a) $(\ )^3, \sqrt{\ }, \ln, \exp, \arccos, \arcsin, \arctan$ är injektiva
(b) $(\ )^3, \sqrt{\ }, \ln, \exp, \arcsin, \arctan$ är strängt växande
(c) $\arccos$ är strängt avtagande
(d) $\cos, \sin, \arccos, \arcsin, \arctan$ är begränsade
(e) $(\ )^2, \sqrt{\ }, |\ |, \exp, \arccos$ är ≥ 0
(f) $(\ )^2, (\ )^3, |\ |, \exp, \cos, \sin, \arctan$ har definitionsmängd $= \mathbb{R}$
(g) $(\ )^3, \ln, \tan$ har värdemängd $= \mathbb{R}$
(h) $(\ )^2, |\ |, \cos$ är jämna
(i) $(\ )^3, \sin, \tan, \arcsin, \arctan$ är udda

P 2.90 Funktionerna i $\{(\ )^3, \sqrt{\ }, \ln, \exp, \arccos, \arcsin, \arctan\}$ är alla injektiva, så för dem gäller $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

För övriga gäller (n står för ett godtyckligt heltal):

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm y \\ |x| = |y| &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm y \\ \cos x = \cos y &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm y + 2\pi n \\ \sin x = \sin y &\quad\Leftrightarrow\quad x = y + 2\pi n \text{ eller } x = \pi - y + 2\pi n \\ \tan x = \tan y &\quad\Leftrightarrow\quad x = y + \pi n \end{aligned}$$

Gränsvärde och kontinuitet

P **3.1** (a) Bara $\Leftarrow$.

(b) Nej. Sätt in ett negativt x.

(c) Om vi har positiva storheter kan vi ta olikheten $x < 1/1000$ och dela bägge sidor med x (som är positivt) samt multiplicera bägge sidor med 1000 och fortfarande ha en ekvivalent utsaga. Då står det $1000 < 1/x$.

P **3.2** Övertygelsen bör bygga på att $|x-4| < 9 \iff -9 < x-4 < 9$. Här kan man sedan addera 4 till alla led. (Observera att olikheten $|x-4| > 9$ inte kan uttryckas riktigt lika smidigt på ett motsvarande sätt.)

P **3.3** Begreppet ”växer snabbare än” må vara intuitivt men kan ofta (som här?) leda till felaktiga slutsatser. Svaret är ”nej” eftersom $\ln(x^2) = 2\ln x$ för positiva x. Sensmoral: Resonemang baserade på ”växer snabbare än”kan aldrig bevisa något men kan ibland användas för att leda in tankarna på rätt spår.

P **3.4** Graf, se boken. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

P **3.5** (a) 0 (b) 3/2

P **3.6** (a) $-3/5$ (b) $-5/7$ (c) $-1/2$

P **3.7** (a) 1 (b) 0 (c) 1

P **3.8** (b) t.ex. $\omega = 11$ (c) t.ex. $\omega = 1/\epsilon$

P **3.10** (a) 1 (b) saknas

P **3.11** (a) 0 (b) ∞ (c) existerar ej

P **3.12** $\sqrt{e}$

P **3.13** (c) nej (d) ja

P **3.15** Gränsvärdet är 1

P **3.16** (a) 0 (b) 1

P **3.17** $e^{-x}\ln x \to -\infty$ respektive 0

P **3.18** (a) 2 (b) 5/4 (c) 3/7 (d) 0 (använd Sats 3.1)

P **3.19** (a) $-1/3$ (b) 1/2

P **3.20** (a) e (b) e

P **3.21** Ja, genom $f(0) = 0$

P **3.22** $A = 1$ och $B = 1/2$

P **3.23** (a) 1 (b) -1 (c) $-\pi/4$

P **3.24** 1/2

Derivator

P **4.1** Man kan titta på många sätt. Titta till exempel på en omgivning av $x = 0$, varför inte intervallet $-1 < x < 1$. Där är $\sin x$ växande. Å andra sidan är $\cos x$ positiv på samma intervall, så om valet för derivatan av $\sin x$ står mellan $\pm \cos x$ så är $+\cos x$ det enda rimliga.

P **4.2** (Titta i läroboken, kapitel 2.)

(a) Det betyder att $x, y \in D_f$ och $x < y$ medför att $f(x) \leq f(y)$.

(b) Det betyder att $x, y \in D_f$ och $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$.

(c) Om $x, y \in D_f$ och $x < y$ så ska det gälla både att $f(x) \leq f(y)$ och att $f(x) \geq f(y)$ vilket innebär att $f(x) = f(y)$. Funktionen f måste alltså vara konstant, till exempel $f(x) = 7$ för alla $x \in D_f$.

(d) Ja, men endast om D_f består av högst en punkt. Definitionen kräver nämligen att om $x, y \in D_f$ och $x < y$ så ska det gälla både att $f(x) < f(y)$ och att $f(x) > f(y)$ och det ser svårt ut att uppfylla. Slutsatsen är att *om det finns* $x, y \in D_f$ med $x < y$ så är f inte både strängt växande och strängt avtagande. Två sådana x, y finns så fort D_f innehåller minst två punkter. Vad gäller om D_f innehåller högst *en* punkt? Då blir kravet uppfyllt eftersom det faktiskt är sant att *om* $x, y \in D_f$ och $x < y$ (och det kan alltså inte inträffa) så gäller att $f(x) < f(y)$ och $f(x) > f(y)$. Det händer ju aldrig, så vi bryter aldrig mot kravet.

P **4.3** (a) Låt till exempel $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$, alltså alla reella x utom $x = 0$. Sätt sedan till exempel $f(x) = -5$ om $x < 0$ och $f(x) = 3$ om $x > 0$.

(b) Därför att om D_f är ett intervall och $f'(x) = 0$ så måste f enligt känd sats vara konstant.

(c) Exempel: $f(x) = 1/x$ som har samma D_f som i (a). Denna funktion är inte avtagande, till exempel är $f(-1) < f(1)$. Rita grafen!

(d) Därför att om D_f är ett intervall och $f'(x) < 0$ så måste f vara avtagande enligt känd sats.

(e) Ja. Standardexemplet är $f(x) = x^3$ som verkligen är *strängt* växande på $\mathbf{R}$ (kontrollera med definitionen!), trots att $f'(0) = 0$.

P **4.4** Det är orimligt. Vi ser att $D_f = \mathbf{R}$. Låt säga att derivatan har nollställen a och b. Tydligen är $f'(x) < 0$ på intervallet $]b, \infty[$. Men det går inte ihop med observationen att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.

P **4.5** Låt t vara tiden Linnea kört (hon startar alltså vid $t = 0$) och låt $f(t)$ beteckna sträckan hon kört vid tiden t. Medelvärdessatsen för derivator säger, med beteckningar från boken, att $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ för minst ett $\xi \in]a, b[$. Om vi nu sätter $a = 0$ (t när Linnea startar, så $f(0) = 0$) och $b = 1$ h (tiden när Linnea har kört en timme, då är dessutom $f(b) = 100$ km) så måste det tydligen finnas ett ögonblick ξ under denna timme där $f'(\xi) = \dfrac{100 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 100$ km/h. Eftersom f' är just hastigheten, kan den alltså inte alltid ligga under 98 km/h. En allmän slutsats är att man under en resa minst en gång håller sin medelhastighet. I alla fall om man kör deriverbart.

P **4.8** (a) $5x^4 + 6x$ (b) $-3 \sin 3x$ (c) $-\dfrac{2}{5x^3}$ (d) $-\dfrac{2}{1 + 4x^2}$ (e) $\sin 2x + 2x \cos 2x$

P **4.9** (a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (b) $11(1 - 3x^2)(x - x^3)^{10}$ (c) $\dfrac{4x}{(1 - x^2)^2}$ (d) $\dfrac{1}{x}$

(e) $\dfrac{1}{x}$ (f) $2x \ln x + x$ (g) $\dfrac{2}{x^2} e^{-2/x}$ (h) $\dfrac{2x}{1 + x^2}$

P 4.10 (a) $\dfrac{2}{1-x^2}$ (b) $\dfrac{3(\ln x)^2}{x}$

(c) $\dfrac{1}{x(1+x^2)}$ (d) $\exp(\sqrt{1+\ln x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x}$

(e) $e^{-1/\sqrt{x}}(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$ (f) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(g) $-e^{-x}(\cos x+\sin x)=\sqrt{2}e^{-x}\sin(x-3\pi/4)$ (h) $\tan^2 x$

(i) $\dfrac{1}{\sin x}$ (j) $\dfrac{2\arctan x}{1+x^2}$

(k) $-\dfrac{4}{x^2+16}$ (l) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$

P 4.11 (a) T.ex. $|x-2|$ (b) Finns ingen

P 4.12 (a) $1/5$ (b) $-(4/3)\cos 1$

P 4.13 $y=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{2}$ respektive $y=-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{8}{3}$

P 4.14 2000π m^2/h

P 4.15 $f'_+(0)=3,\ f'_-(0)=1;\ f'(0)$ existerar ej

P 4.16 (a) ja (b) nej

P 4.17 $A=1$ och $B=-1/2$

P 4.19 $(Df^{-1})(2)=1/2$

P 4.20 $\dfrac{7\pi}{54\sin^2 27^\circ}\approx 2{,}0$ cm/min

P 4.21 $f'(x)=2x\ln|x|+x-1$ om $x\neq 0$, $f'(0)=-1$ $f''(x)=2\ln|x|+3$ om $x\neq 0$, $f''(0)$ finns ej

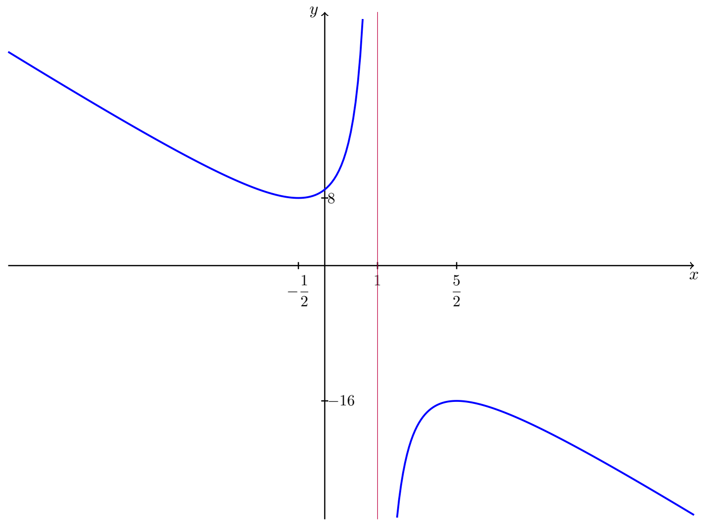
P 4.22 (a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,;\ x\neq 1\}=]-\infty,1[\cup]1,\infty[$. (b) $f'(x)=\dfrac{-4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-1)^2}$.

(c)

x		$-1/2$		1		$5/2$	
-4	$-$		$-$		$-$		$-$
$x+1/2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-5/2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

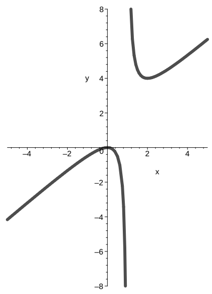
(d) $f(-1/2)=8$, $f(5/2)=-16$, $f(x)\to-\infty\,,\ x\to 1^+$, $f(x)\to\infty\,,\ x\to 1^-$, $f(x)\to -\infty\,,\ x\to\infty$ och $f(x)\to\infty\,,\ x\to-\infty$.

(e)



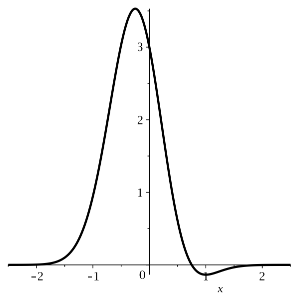
(f) **Svar:** För graf, se ovan. f har ett lokalt minimum i $x = -1/2$ med det lokala minimivärdet $f(-1/2) = 8$ och ett lokalt maximum i $x = 5/2$ med det lokala maximivärdet $f(5/2) = -16$.
(h) $V_f = \{y \in \mathbb{R}\,;\ y \leq -16 \text{ eller } y \geq 8\} =]-\infty, -16\,] \cup [\,8, \infty[$. (i) $x < 1$.
(j) Ingen, en respektive två lösningar. (k) Både största och minsta värde saknas.

P 4.23 (a) Se figur här intill.
(b) $V_f =]-\infty, 0] \cup [4, \infty[$
(d) 2
(e) $\begin{cases} 2 & \text{om } k < 0 \text{ eller } k > 4 \\ 1 & \text{om } k = 0 \text{ eller } k = 4 \\ 0 & \text{för övriga } k \end{cases}$

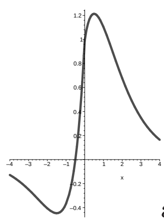


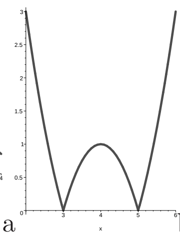
P 4.24 (a) $f' = 3x(x-2)$. Strängt avtagande i $[0, 2]$.
(b) $f' = -\dfrac{(x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3})}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$. Strängt avtagande i intervallet $x \geq 1/\sqrt{3}$.

P 4.25 Lok max $f(-1/4) = 4e^{-1/8} > 0$, lok min $f(1) = -e^{-2} < 0$, dessa är även största resp minsta värde



P 4.26 (a) Lok max $f(1/2) = 2e^{-1/2}$, lok min $f(-3/2) = -2e^{-3/2}$
(b) Lok max $f(4) = 1$, lok min $f(3) = 0$ och $f(5) = 0$.


a


b

P 4.27 $f(1) = -1$ är minst och $f(e^2) = e^2 - 1$ är störst

P 4.28 $\dfrac{A^{3/2}}{\sqrt{18\pi}}$ (hur ser tältet ut?)

P 4.29 $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$

P 4.30 Största värdet är $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ (då triangeln är liksidig), minsta värde saknas

P 4.31 (b) $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f'(\xi)(x_2 - x_1) = \dfrac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1)$ för något ξ med $x_1 < \xi < x_2$.

(c) $0 < f'(\xi) \leq 1$, d.v.s. $0 < \dfrac{1}{1+\xi^2} \leq 1$.

(d) $0 < \arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1$ för $x_1 < x_2$.

(e) $\dfrac{1}{2}(x_2 - x_1) < \arctan x_2 - \arctan x_1 < x_2 - x_1$ för $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$.

P 4.32 (a) För varje $x_1, x_2 \in M$ med $x_1 < x_2$ gäller $f(x_1) > f(x_2)$
(b) Ja (c) Nej. Exempel $f(x) = 1/x$ (d) Ja

P 4.33 (a) falskt (b) falskt

P 4.34 (a) $x \leq 0$ (b) $x > 0$, $x \neq 1$ (c) $x \neq 0$

P 4.35 750 kr/dygn

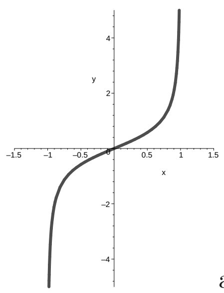
P 4.37 Ja, f är strängt avtagande

P 4.38 $f(x) = \arctan x$.

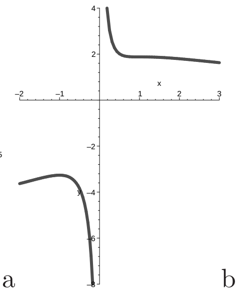
P 4.39 $|x| \sin x$ är kontinuerligt deriverbar men ej $|x| \cos x$

P 4.40 (c) 1 (d) 3

P 4.41 (a) Asymptoter $x = \pm 1$, funktionen definierad för $|x| < 1$
(b) Asymptot $x = 0$, $y \to -\infty$ då $x \to \pm\infty$, lok max $f(-1) = -(1 + \pi/2 + \ln 2)$



a



b

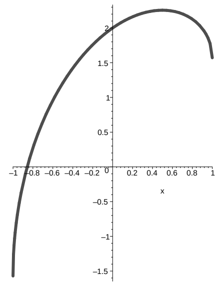
P 4.44 Alla värden större eller lika med $\dfrac{3(80)^{1/6}}{20}$.

P 4.45 $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

P 4.46 (a) 1 (b) 2 (c) 2 (d) 2

P 4.47 $[-21, 60]$

P 4.50 Lok max $f(1/2) = \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, $V_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right]$.



P 4.51 $B \geq 3$

P 4.52 Ingen rot om $a > 0$, $b < a(1 - \ln a)$ eller $a = 0$, $b \leq 0$.
En rot om $a < 0$ eller $a = 0$, $b > 0$ eller $a > 0$, $b = a(1 - \ln a)$.
Två rötter om $a > 0$, $b > a(1 - \ln a)$.

P 4.53 För $a \leq 0$ eller $a \geq 1/e$

P 4.54 $f'(x) = f(x)\left(2x + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\tan x}{2} - \dfrac{6}{x \ln x} - 2\cot x\right)$

P 4.55 Alla $z = re^{i\phi}$ med $|\phi| \leq \pi/6$

P 4.56 $D\left(\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ om $x \neq 1$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ om $x = 1$

Primitiva funktioner

P 5.1 Det bygger alltså på att man vet att ett alternativ är korrekt. Här räcker det ju att sätta $v = 0$, så ska man jämföra 0 med 1 respektive 0. Det blir den andra formeln sålunda.

P 5.2 Väljer man (till att börja med) $a = 0$ så står det att $\cos b$ antingen är $\cos b$ eller $\cos b$, och det kan vi hålla med om, men det hjälper oss inte. Samma med $b = 0$. Däremot, sätter vi $a = b = \pi/2$ så blir $\cos(a + b) = \cos \pi = -1$, vilket stämmer med $\cos a \cos b - \sin a \sin b$ som blir $0 - 1 = -1$. Vi måste dock också kontrollera om den första varianten sållas bort. Det gör den: $\cos a \cos b + \sin a \sin b$ blir 1 med värdena på a och b insatta.

P 5.3 (a) $\dfrac{2}{3}x^{3/2} + C$ (b) $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + C$ (c) $\ln|x| + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + C$ (d) $-\dfrac{1}{x+2} + C$
(e) $\dfrac{2}{5}x^{5/2} - \dfrac{4}{3}x^{3/2} + C$ (f) $-e^{-x} + C$ (g) $\dfrac{1}{2}\arctan 2x + C$ (h) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$

P 5.4 (a) $3x^2$ är derivatan av $1 + x^3$ (och även till x^3).
(b) $t = 1 + x^3$ ($t = x^3$ fungerar också och ger liknande räkningar) ger

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow dt = 3x^2 dx \quad \text{och} \quad \int \frac{3x^2}{(1+x^3)^2} dx = \int \frac{dt}{t^2}.$$

(c) $-\dfrac{1}{1+x^3} + C$.
(d) x^4 är 'nästan' derivatan av x^5 då derivatan av x^5 är en konstant gånger x^4.
(e) $\displaystyle\int x^4 \cos(x^5)\, dx = \frac{1}{5}\int 5x^4 \cos(x^5)\, dx$. Sätt sedan $t = x^5$.
(f) $\displaystyle\int x^4 \cos(x^5)\, dx = \frac{1}{5}\int \cos t\, dt = \frac{1}{5}\sin(x^5) + C$. (g) $e^{\sin x} + C$.

P 5.5 (a) $\dfrac{1}{12}\left(1 + x^2\right)^6 + C$ (b) $\dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$ (c) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$ (d) $\ln(2 + e^x) + C$

P 5.6 (a) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$ (b) $f(x) = -\dfrac{1}{12\left(2 + 3x^2\right)^2} + 1$

P 5.7 (a) $-(x+1)e^{-x} + C$ (b) $\dfrac{x}{2}\sin 2x + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{x^2}{2}\right)\cos 2x + C$
(c) $\dfrac{x^2 \ln|x|}{2} - \dfrac{x^2}{4} + C$ (d) $x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) + C$
(e) $(x-1)e^x + \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$ (f) $x \arctan x - \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{2} + C$
(g) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$ (h) $\dfrac{\ln\left(1 + \sin^2 x\right)}{2} + C$
(i) $-\ln|\cos x| + C$

P **5.8** $\left(-2x^2-3\right)e^{-2x}+C$

P **5.9** (a) $\dfrac{x^2e^{x^2}}{2}+C$ (b) $\dfrac{x^3\sin x^3+\cos x^3}{3}+C$

(c) $\dfrac{4}{15}(1+\sqrt{x})^{3/2}(3\sqrt{x}-2)+C$ (d) $(2\sqrt{x}-2)e^{\sqrt{x}}+C$

P **5.11** Vad betyder $\displaystyle\int \cos x\,\sin x\,dx$?

P **5.12** $f(x)=\left(2x\sqrt{x}-6x+12\sqrt{x}-12\right)e^{\sqrt{x}}+4e$

P **5.13** (a) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$ (b) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)}$

(c) $\dfrac{A}{x+4}+\dfrac{B}{(x+4)^2}$

(d) Detta uttryck är redan partialbråksuppdelat så långt det är möjligt

(e) $\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{C}{(x+2)^3}+\dfrac{D}{x-3}+\dfrac{E}{(x-3)^2}$

(f) $\dfrac{Ax+B}{x^2+x+5}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+x+5)^2}+\dfrac{E}{x-4}$

P **5.14** $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

P **5.15** Linnéa har rätt, men varför blev det fel i Linus kalkyl?

P **5.16** (a) $\dfrac{x^3}{3}-x+\arctan x+C$ (b) $-x+\dfrac{5}{2}\arctan\dfrac{x}{2}+C$

(c) $\dfrac{x^3}{3}+x^2-4x+11\ln|x+3|+C$ (d) $\ln\left(x^2+4x+13\right)-\dfrac{7}{3}\arctan\dfrac{x+2}{3}+C$

(e) $\dfrac{\ln|x-1|}{2}-\dfrac{\ln|x+1|}{2}+C$ (f) $\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{\ln|x+1|}{3}+\dfrac{8\ln|x-2|}{3}+C$

P **5.17** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{x-1}+\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ x>1$

P **5.18** (a) $\dfrac{1}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}+C$

(b) $-\dfrac{1}{4(x-2)}-\dfrac{1}{4(x+2)}+\dfrac{\ln|x-2|}{8}-\dfrac{\ln|x+2|}{8}+C$

(c) $-\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{\ln|x+1|}{4}-\dfrac{\ln|x-1|}{4}+C$

(d) $\dfrac{\ln|x+1|}{8}+2\ln|x+2|-\dfrac{17\ln|x+3|}{8}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{4(x+3)^2}+\dfrac{5}{4(x+3)}+C$

(e) $\dfrac{\ln|x|}{5}-\dfrac{\ln\left(x^2+2x+5\right)}{10}-\dfrac{1}{10}\arctan\dfrac{x+1}{2}+C$

(f) $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}+C$

(g) $\dfrac{x^3}{3}+2\ln|x-2|+\dfrac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)-2\arctan\dfrac{x+1}{2}+C$

(h) $\dfrac{x}{4\,(x^2+2)}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$

(i) $\dfrac{x}{x^2+2x+3}+C$

P **5.19** $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{3}{8}$

P 5.20 (a) $\dfrac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \ln|x| + C$ (b) $\dfrac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{3x}{8\left(x^2+1\right)} + \dfrac{3}{8}\arctan x + C$

P 5.21 (a) $\ln|x| - \dfrac{1+x^2}{2x^2}\ln\left(1+x^2\right) + C$ (b) $\dfrac{x^2+1}{2\left(x^2+2\right)}\arctan x - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$

P 5.22 (a) $\arctan e^x + C$

(b) $\ln x - \dfrac{1}{n}\ln(1+x^n) + C$ om $n \neq 0$, $\dfrac{1}{2}\ln x$ om $n = 0$

(c) $\dfrac{x^2}{4}\left(2(\ln(x))^2 - 2\ln x + 1\right) - \dfrac{2x+1}{4}e^{-2x} + C$

(d) $\dfrac{x^2+1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + C$

P 5.23 $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \ln(x-1) - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 3\arctan x - \dfrac{3\pi}{2}$

P 5.24 (a) $-\dfrac{\ln\left(2-\sin^2 x\right)}{2} + C$

(b) $\dfrac{3x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{\sin 4x}{32} + C$

(c) $-\cos x + \dfrac{2}{3}\cos^3 x - \dfrac{1}{5}\cos^5 x + C$ eller $-\dfrac{\cos 5x}{80} + \dfrac{5\cos 3x}{48} - \dfrac{5\cos x}{8} + C$

(d) $\dfrac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \dfrac{1}{2}\ln(1-\sin x) + C$ eller $\ln\left|1+\tan\dfrac{x}{2}\right| - \ln\left|1-\tan\dfrac{x}{2}\right| + C$

(e) $2(\sin x - 1)e^{\sin x} + C$

(f) $\dfrac{\cos^7 x}{7} - \dfrac{\cos^5 x}{5} + C$ eller $\dfrac{\cos 7x}{448} + \dfrac{\cos 5x}{320} - \dfrac{\cos 3x}{64} - \dfrac{3\cos x}{64} + C$

(g) $2\sin x + \dfrac{1}{4}\ln(1-\sin x) - \dfrac{1}{4}\ln(1+\sin x) + C$

(h) $-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{4}\ln(1-\cos x) - \dfrac{1}{4}\ln(1+\cos) + C$

(i) $\dfrac{3\sin^4 x}{2} - \dfrac{4\sin^6 x}{3} + C$ eller $\dfrac{\cos 6x}{24} - \dfrac{\cos 4x}{16} - \dfrac{\cos 2x}{8} + C$

(j) $\dfrac{\sin x}{3(1+\cos x)^2} + \dfrac{\sin x}{3(1+\cos x)} + C$ eller $\dfrac{1}{6}\tan^3\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2} + C$

(k) $-\dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$

(l) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C$

P 5.25 $f(x) = \dfrac{1}{4\cos^4 x} - \dfrac{1}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\tan^4 x}{4}$

P 5.26 (a) $\dfrac{3}{7}\cos 3x\sin 4x - \dfrac{4}{7}\sin 3x\cos 4x + C$ eller $\dfrac{\sin x}{2} - \dfrac{\sin 7x}{14} + C$

(b) $\dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C$

(c) $\dfrac{1}{2}\left((x+1)\sin x - x\cos x\right)e^{-x} + C$

P 5.27 $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\sin bx - \dfrac{b}{a^2+b^2}\cos bx\right)e^{ax} + C$ om $a^2+b^2 \neq 0$. Hur blir det om $a = b = 0$?

P 5.28 (a) $4x + 3\ln\left|\tan\dfrac{x}{2} - 2\right| + 3\ln\left|\tan\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\right| - 3\ln\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right) + C$

$= 4x + 3\ln|4\cos x + 3\sin x| + D$

(b) $\dfrac{x}{12}(\cos 3x - 9\cos x) + \dfrac{1}{36}(27\sin x - \sin 3x) + C$

P **5.29** $\dfrac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + C$

P **5.30** (a) $2\sqrt{x-2} - 2\arctan\sqrt{x-2} + C$

(b) $3\sqrt[3]{x} + \ln\left|\sqrt[3]{x} - 1\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right) - \sqrt{3}\arctan\dfrac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}} + C$

(c) $\arcsin(x-1) + C$

(d) $\sqrt{x^2+x-2} - 3\ln\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}\right) + C$

(e) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$ eller $2\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C$

(f) $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$

(g) $\dfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$

(h) $\sqrt{x^2+2x+2} - \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$

(i) $\dfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin(x-1) + C$

(j) $2(x+1)\sqrt{1+x-x^2} - 3\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$

(k) $-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$

(l) $\ln|x| - \ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right) + C$

P **5.31** (a) $\dfrac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2+3} + \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2+3}\right) + C$

(b) $\dfrac{1}{2}\sin x\sqrt{\cos 2x} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin x\right) + C$

P **5.32** $f(x) = \arcsin(x-1) + \left(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{3} - 1\right)\sqrt{2x-x^2} + \dfrac{1}{3}$ för $0 < x < 2$

P **5.33** $f(x) = \sqrt{x^2+x} + \dfrac{1}{2}\ln\left(x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right) + \dfrac{\ln 2}{2}$

P **5.34** (a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\ln(1+\sin x)}{2} + C$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right)\right| + C$

(c) $-x - 4\sqrt{x+1} - 4\ln\left|\sqrt{x+1} - 1\right| + C$

(d) $\dfrac{3}{2}x^{2/3} - 2x^{1/2} + 6x^{1/6} - 3\ln\left(x^{1/3} + x^{1/6} + 1\right) - 2\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2x^{1/6}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

(e) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}\right| + C$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C$

P **5.35** (a) $f(x) = \begin{cases} 1+\cos x & \text{om} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 3-\cos x & \text{om} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$ (b) $f(\pi) = 4$

P **5.36** Precis då a, b och c uppfyller villkoret $a + 2b + 3c = 0$

P **5.38** $f_{\min}$ saknas, $f_{\max} = f(1) = 1 + 4/e$

P **5.39** Ja

P **5.40** $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

P 5.41 $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)$ ger $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt[6]{x}} = 0$

P 5.42 $\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x\,\cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

Bestämda integraler

P 6.1 Kanske genom att använda att $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_0^5 f(x)dx \le \int_0^5 g(x)dx$. Med hjälp av olikheten $e^{-x}\cos(x^3) \le e^{-x}$ (utöver $\cos(x^3) \le 1$ använder vi också att $e^{-x} > 0$) finner vi att $\int\limits_0^5 e^{-x}\cos(x^3)dx \le \int\limits_0^5 e^{-x}dx = 1 - e^{-5} < 1$.

P 6.2 Det finns många. Standardexemplet brukar vara i stil med funktionen f som tar värdet $f(x) = 1$ om x är rationellt och $f(x) = 0$ om x är irrationellt. Då är varje undertrappa högst 0 och varje övertrappa minst 1 i varje punkt på $[0, 1]$. Tänk efter vad detta betyder i definitionen av integrerbarhet.

P 6.3 (b) $t = e^x$ och $dt = e^x\,dx$. (c) $t = e^0 = 1$ när $x = 0$ och $t = e^1 = e$ då $x = 1$.
(d) $\int_0^1 \left(1+e^{-x}\right)^{-1} dx = \int_1^e \frac{dt}{1+t}$. (e) $\int_0^1 \left(1+e^{-x}\right)^{-1} dx = \int_2^{e+1} \frac{ds}{s}$. (f) $\ln\frac{e+1}{2}$.

P 6.4 (a) $\frac{e^2-1}{2}$ (b) $\frac{27}{10}$ (c) $\ln 2$ (d) $\frac{(\ln 3)^2}{2}$ (e) $\frac{94\sqrt{2}-56}{15}$ (f) $\frac{48\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{15}$
(g) $\frac{5^{18}-3^{18}}{36}$ (h) $\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (i) 0 (j) $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$ (k) $\frac{\pi}{2}$ (l) $\frac{2}{3}$

P 6.6 (a) $0 \le x^4 \le x^2$ (b) $\frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^4} \le 1$ (c) $\frac{\pi}{4} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} \le 1$
(d) Ledning: $\sin x \le x$ för $x \ge 0$.
(e) Ledning: $\tan x \ge x$ för $0 \le x < \frac{\pi}{2}$. Hur stor är 1 radian?

P 6.8 (a) $x^2\ln(x+1)$ (b) $-\frac{x^4}{x^2+1}$ (c) 0 (d) $\frac{2e^{x^2}-e^x}{x}$

P 6.9 $\ln 2$

P 6.10 (a) 4 (b) 7/2 (c) 1 (d) 29/4 (e) 125

P 6.11 (a) $-\frac{2}{\pi^2}$ (b) $\frac{5e^3-2}{27}$ (c) $2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$ (d) $99\ln 3 - 34$
(e) $\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}$ (f) $3e^5 - 2e^3 + 6e^2 - 7e$ (g) 1 (h) $2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
(i) $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ (j) $6\cos 1 - 3\sin 1$ (k) 0 (l) $\frac{1}{4}$

P 6.12 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{\pi+3\ln 2}{4}$ (c) $2e + 3\ln 3 - 8$

P 6.13 (a) $8 + \ln 3$ (b) $\frac{\ln 5}{4} - \frac{\arctan 2}{2}$ (c) $\frac{5\ln 2}{2} - \frac{3\ln 3}{2}$
(d) $\frac{\ln 375}{2}$ (e) $\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\sqrt{2} - \frac{1}{3}\ln\frac{9}{8} - \frac{\pi}{6\sqrt{2}}$ (f) $\frac{\pi\sqrt{3}}{36} - \frac{1}{4}$
(g) $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (h) $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\arctan 3 - \arctan 2)$ (i) $\frac{\pi}{4}$
(j) $1 + 2\ln\frac{4}{3}$ (k) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (l) $2\arctan e - 2\arctan\frac{1}{e}$

P **6.14** (a) $\frac{3\pi}{10} - \frac{3\ln 2}{5}$ (b) $\frac{\pi}{12} - \frac{20}{9} + \frac{9\ln 5}{2} + \frac{13\ln 2}{3} - \frac{\arctan 3}{3}$

(c) $\frac{5\pi}{16}$ (d) $1 - \frac{\pi}{4}$

(e) $\frac{\pi}{2}$ (f) $\frac{5}{36}$

(g) $\frac{\pi}{2} - 1$ (h) $\frac{2\pi}{3}$

(i) $\frac{\pi^2}{4}$ (j) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

(k) $4\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - 10 + 4\sqrt{2}$ (l) $6\left(\sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{\pi}{3} + \arctan\sqrt{2}\right)$

(m) $\sqrt{2} - 1 - \ln(1+\sqrt{2})$ (n) $\sqrt{2} + 3\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

(o) $2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{9+4\sqrt{5}}{3+2\sqrt{2}}$

P **6.16** 0

P **6.17** $230\sqrt{3} \approx 400\ V$

P **6.18** (a) divergent (b) 1 (c) $4(\ln 2 - 1)$

P **6.19** (a) divergent (b) $\ln 2$ (c) divergent (d) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

P **6.22** (a) $t = \frac{4}{3}$ (b) $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $t = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$

P **6.24** $4/e$

P **6.25** $N = 10$ räcker

P **6.27** 1.

Tillämpningar av integraler

P **7.1** $4\ln 2$

P **7.2** Vad blir arean av en kvadrat som omsluter cirkeln? Vad får uttrycken för dimension?

P **7.3** $\int_{R/2}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = \frac{\pi}{3}R$

P **7.4** $\frac{\pi L}{2} + \int_0^{L/R} (L - R\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi L}{2} + \frac{L^2}{2R}$

P **7.5** $\frac{\pi}{2}(3e^2 - 27 + 48\ln 2)$

P **7.6** $\pi(2 - \ln 2 - \pi/4)$

P **7.7** $2\pi\int_{-R}^{R}(2R - x)\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 4\pi^2R^2$

P **7.8** (a) Arean av D är $\int_{-1}^{3}\big(f(x) + 2\big)dx$

(b) $V_b = \int_{-1}^{3} 2\pi(x+1)\big(f(x)+2\big)\,dx,\ \ A_b = \int_{-1}^{3} 2\pi(x+1)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx + \pi\cdot 4^2$

(c) $V_c = \displaystyle\int_{-1}^{3} \Big(\pi\big(f(x)+3\big)^2 - \pi\cdot 1^2\Big)\,dx,$

$A_c = \displaystyle\int_{-1}^{3} 2\pi\big(f(x)+3\big)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx + 2\pi\cdot 1\cdot 4 + (\pi\cdot 7^2 - \pi\cdot 1^2)$

Maclaurin- och Taylorutveckling

P **8.1** $\sqrt{x} = 2 + \dfrac{1}{4}(x-4) - \dfrac{1}{64}(x-4)^2 + \dfrac{1}{512}(x-4)^3 + \mathcal{O}\big((x-4)^4\big)$

P **8.2** (a) $3 - 5x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$ (b) $x^2 - 2x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ (c) $x^3 - 3x^4 + 6x^5 + \mathcal{O}(x^6)$

P **8.3** (a) $\mathcal{O}(x^4)$ (b) $\mathcal{O}(x^8)$ (c) $\mathcal{O}(x^4)$ (d) $\mathcal{O}(x^{12})$ (e) $\mathcal{O}(x^4)$ (f) $\mathcal{O}(x^{12})$

P **8.4** (a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$ (b) $2x - \dfrac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$ (c) $x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)$

(d) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ (e) $1 - \dfrac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^8)$ (f) $-x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$

P **8.5** $\big(\ln(1+x)\big)^3 = x^3 - \dfrac{3x^4}{2} + \dfrac{7x^5}{4} + \mathcal{O}(x^6)$

P **8.6** (a) $3 + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{216} + \mathcal{O}(x^6)$ (b) $\ln 2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{24} - \dfrac{x^4}{64} + \mathcal{O}(x^5)$ (c) $-2x + \dfrac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$

(d) $e - 2ex^2 + 2ex^4 + \mathcal{O}(x^6)$

P **8.7** (a) $-1/2$ (b) -2 (c) $1/2$

P **8.8** (a) 0 (b) $1/2$ (c) $1/3$

P **8.9** (a) $a = 1$, gränsvärde 0 (b) $b = 1$, gränsvärde $-1/6$ (c) $c = -1/2$, gränsvärde $7/12$

P **8.10** $a = 2$, vilket ger $f'(0) = 5/2$

P **8.11** $a = \pm 1$, $b = -2$; gränsvärdet blir $-7/3$ (i båda fallen)

P **8.12** $a = -1$; gränsvärdet blir -2

P **8.13** Gränsvärdet existerar och är 1

P **8.14** Nej, ty $f(t) = 1$ om $t \neq 1$ men $f(1) = 1/2$

P **8.15** (a) $t = x^2 + \sin x = x + x^2 - \dfrac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$ (b) $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + \mathcal{O}(t^5)$

(c) $t^2 = x^2 + 2x^3 + \dfrac{2x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5)$, $t^3 = x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^5)$, $t^4 = x^4 + \mathcal{O}(x^5)$, $\mathcal{O}(t^5) = \mathcal{O}(x^5)$

(d) $\ln(1 + x^2 + \sin x) = \ln(1+t) = \ldots = x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{5x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)$

P **8.16** (a) $t = x\arctan x = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{x^6}{5} + \mathcal{O}(x^8)$

(b) $(1+t)^{-1/2} = 1 - \dfrac{t}{2} + \dfrac{3t^2}{8} - \dfrac{5t^3}{16} + \mathcal{O}(t^4)$ räcker, ty $\mathcal{O}(t^4) = \mathcal{O}(x^8)$

(c) $1/\sqrt{1 + x\arctan x} = (1+t)^{-1/2} = \ldots = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{13x^4}{24} - \dfrac{53x^6}{80} + \mathcal{O}(x^8),$

ty $t^2 = t\cdot t = x^4 - \dfrac{2x^6}{3} + \mathcal{O}(x^8)$, $t^3 = t^2\cdot t = x^6 + \mathcal{O}(x^8)$, $\mathcal{O}(t^4) = \mathcal{O}(x^8)$

P **8.17** $\cos(\sin x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$, $\displaystyle\int_0^x \cos(\sin t)\,dt = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$

P 8.18 (a) $p(x) = x - 2x^2$ (b) $p(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{14x^5}{15}$

P 8.19 (a) $\tan x$ är udda (b,c) $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$ (d) $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + \mathcal{O}(x^8)$

P 8.20 (a) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{10} + \mathcal{O}(x^7)$ (b) $x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$

P 8.21 (a) 4 (b) 16/3

P 8.22 $x - x^3 + \dfrac{5x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)$

P 8.23 (a) Lokalt minimum: $2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 2 + x^2\big(1 + \mathcal{O}(x)\big)$
(b) Lokalt minimum: $-2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3) = -2 + x^2\big(1 + \mathcal{O}(x)\big)$
(c) Lokalt maximum: $2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 2 + x^2\big(-1 + \mathcal{O}(x)\big)$
(d) Lokalt maximum: $-2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3) = -2 + x^2\big(-1 + \mathcal{O}(x)\big)$
(e) Ingetdera: $5 + x^3 + \mathcal{O}(x^5) = 5 + x^3\big(1 + \mathcal{O}(x^2)\big)$
(f) Vi vet för lite för att kunna avgöra frågan (vi vet ju inget om tecknet på $\mathcal{O}(x^2)$)

P 8.24 (a) Lokalt minimum $(f(x) = x^2 + \mathcal{O}(x^4))$
(b) Inget lokalt extremvärde $(f(x) = 4 + 19x^3/2 + \mathcal{O}(x^4))$
(c) Lokalt maximum $(f(x) = 2 - 4x^4/3 + \mathcal{O}(x^6))$

P 8.26 Gränsvärdet existerar och är e

P 8.27 (a) $-2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (4\xi - 2)(x-1)^3$ för något ξ mellan 1 och x
(b) $-5 + 7x - 3x^2 + (4\xi - 2)x^3$, där ξ ligger mellan 0 och x
(c) $-5 + 7x - 3x^2 - 2x^3 + x^4$ (resttermen blir alltså noll i detta fall)

P 8.28 $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a)$, där ξ ligger mellan a och x,
$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, där ξ ligger mellan a och b (medelvärdessatsen!)

P 8.29 (a) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{\cos\xi}{120}x^5$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x
(b) Använd att $\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) = \dfrac{\cos\xi}{120}x^5$, tag absolutbelopp ($|\cos\xi| \le 1$ för alla $\xi \in \mathbb{R}$)
(c) $0 \le \xi \le \pi/3$, vilket medför att $1/2 \le \cos\xi \le 1$; notera att $x^5 \ge 0$ för aktuella x
(d) $\dfrac{x^5}{120} \le \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \le \dfrac{x^5}{240}$; $-\pi/3 \le \xi \le 0$, så $1/2 \le \cos\xi \le 1$ även nu

P 8.30 (a) $\arctan x = x - \dfrac{\xi}{(1+\xi^2)^2}\,x^2$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x
(b) $\left|\arctan\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}\right| = \left|-\dfrac{\xi}{(1+\xi^2)^2}\cdot\dfrac{1}{5^2}\right| = \dfrac{|\xi|}{(1+\xi^2)^2}\cdot\dfrac{1}{25} \le \dfrac{1/5}{(1+0^2)^2}\cdot\dfrac{1}{25} = \dfrac{1}{125} \le \dfrac{1}{100}$,
ty $\xi = \xi(1/5)$ finns någonstans mellan 0 och 1/5, så $|\xi| \le 1/5$ och $1 + \xi^2 \ge 1 + 0^2$

P 8.31 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{e^\xi x^5}{120}$, där ξ ligger mellan 0 och x,

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} = 1 + \big(-\tfrac{1}{2}\big) + \frac{(-1/2)^2}{2} + \frac{(-1/2)^3}{6} + \frac{(-1/2)^4}{24} + \frac{e^\xi(-1/2)^5}{120},\ \text{där } -\frac{1}{2} \le \xi \le 0,$$

så $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx \dfrac{233}{384}$ (= 0,606 7 . . .) med $|\text{felet}| \le \dfrac{e^0}{2^5\cdot 120} = \dfrac{1}{32\cdot 120} < 10^{-3}$ (= 0,001)

P 8.32 (a) $f(x) = 5 + \dfrac{5x}{2} - \dfrac{5x^2}{8(1+\xi)^{3/2}}$ för något $\xi = \xi(x)$ som ligger mellan 0 och x

(b) $\sqrt{26} = f(\frac{1}{25}) = \frac{51}{10} - \frac{1}{1000(1+\xi)^{3/2}}$, där $0 \le \xi \le \frac{1}{25}$, så $\sqrt{26} \approx \frac{51}{10}$

med $|\text{felet}| = \frac{1}{1000(1+\xi)^{3/2}} \le \frac{1}{1000 \cdot 1^{3/2}} = \frac{1}{1000}$

(c) $\sqrt{24} = f(-\frac{1}{25}) = \frac{49}{10} - \frac{1}{1000(1+\xi)^{3/2}}$, där $-\frac{1}{25} \le \xi \le 0$, så $\sqrt{24} \approx \frac{49}{10}$

med $|\text{felet}| = \frac{1}{1000(1+\xi)^{3/2}} \le \frac{1}{1000(24/25)^{3/2}} = \frac{\sqrt{24}}{8 \cdot 24^2} < \frac{5}{8 \cdot 24^2} = \frac{5}{512 \cdot 9} < \frac{1}{900}$

P **8.33** (a) $(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} - \frac{5(1+\xi)^{-7/2} \cdot t^3}{16}$ för något $\xi = \xi(t)$ mellan 0 och t

(b) $\pi \approx 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{3}{40 \cdot 2^5}\right) = \frac{2009}{640}$ $(= 3{,}139\ldots)$, med fel $= 6 \cdot \frac{5}{16} \int_0^{1/2} \frac{x^6\,dx}{\big(1+\xi(x)\big)^{7/2}}$,
där $\xi(x)$ ligger mellan 0 och $-x^2$

(c) $|\text{felet}| \le \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{\big(1-(1/2)^2\big)^{7/2}} \cdot \frac{(1/2)^7}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7} = \frac{5\sqrt{3}}{1512} < 10^{-2}$ $(= 0{,}01)$

P **8.34** (a) $\underbrace{\ln(1+x)}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{\text{Approximation}} \underbrace{- \frac{x^4}{4(1+\xi)^4}}_{\text{Approximationsfel}}$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x

(b) $x = 1/10$ i (a) ger

$$\underbrace{\ln(11/10)}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{(1/10) - \frac{(1/10)^2}{2} + \frac{(1/10)^3}{3}}_{=\,143/1500,\ \text{approximation}} \underbrace{- \frac{(1/10)^4}{4(1+\xi)^4}}_{\text{Approximationsfel}}$$

för något ξ mellan 0 och 1/10, så, eftersom $(1+\xi)^4 \ge (1+0)^4 = 1$,

$$\left|\ln\frac{11}{10} - \frac{143}{1500}\right| = \left|-\frac{(1/10)^4}{4(1+\xi)^4}\right| = \frac{(1/10)^4}{4(1+\xi)^4} = \frac{1}{40\,000\,(1+\xi)^4} \le \frac{1}{40\,000}.$$

(c) $\frac{p}{q} = (1/10) - \frac{(1/10)^2}{2} + \frac{(1/10)^3}{3} - \frac{(1/10)^4}{4}$ duger, med

$$|\text{felet}| = \left|\ln\frac{11}{10} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{(1/10)^5}{5(1+\xi)^5}\right| = \frac{(1/10)^5}{5(1+\xi)^5} \le \frac{1}{500\,000} \le \frac{1}{100\,000},$$

ty ξ ligger mellan 0 och 1/10, så $(1+\xi)^5 \ge 1$. (Utveckla $\ln(1+x)$ ett steg längre!)

P **8.35** (a) $\cos\frac{1}{10} \approx 1$ med fel $= -\frac{\cos\xi}{2!} \cdot (\frac{1}{10})^2$ för något ξ mellan 0 och $\frac{1}{10}$, så $|\text{felet}| \le \frac{1}{200} \le \frac{1}{100}$

(b) $\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = \frac{13}{24}$ med $|\text{felet}| \le \frac{1^6}{6!} = \frac{1}{720} \le \frac{1}{100}$

P **8.36** $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, fel $= \frac{\cos\xi}{4!}x^4$ för något ξ mellan 0 och x; $|\text{felet}| \le \frac{1}{4!} \cdot (1/2)^4 = \frac{1}{16 \cdot 24} < 10^{-2}$

P **8.37** $1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$ $\left(\text{felet}(x) = -\frac{e^\xi x^{10}}{120}\text{, där } -x^2 \le \xi \le 0\text{, så } |\text{felet}| \le \frac{e^0 1^{10}}{120} < 10^{-2}\right)$

P **8.38** (a) $p_1(x) = 3x$ (b) 3/4

P **8.39** $\sqrt[5]{33} \approx 2 + \frac{1}{80} = \frac{161}{80}$, med $|\text{felet}| = \frac{4}{25(1+\xi)^{9/5}} \cdot \frac{1}{2^{10}} \le \frac{4}{25 \cdot 1^{9/5}} \cdot \frac{1}{2^{10}} < 2^{-10} \le 10^{-3}$
(ξ mellan 0 och 1/32).

P 8.40 (b) $|\text{felet}| = \dfrac{3m_0c^2}{8(1+\xi)^{5/2}}\dfrac{v^4}{c^4} \le \dfrac{3m_0c^2}{80.000\,(99/100)^{5/2}}$ (ξ mellan 0 och $-v^2/c^2$).

Approximationen blir bra då $|v|$ är liten i förhållande till c

P 8.41 Varje bråktal $C \ge \dfrac{\cosh 1}{4!}$ duger, exempelvis $C = \dfrac{1}{12}$

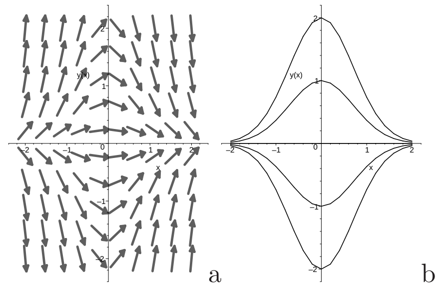
P 8.42 $\ln 2 = f\big(\frac{1}{3}\big) \approx \dfrac{2}{1\cdot 3^1} + \dfrac{2}{3\cdot 3^3} + \dfrac{2}{5\cdot 3^5} + \dfrac{2}{7\cdot 3^7} + \dfrac{2}{9\cdot 3^9}$ (= 0,693 14 . . .), med fel $\dfrac{f^{(11)}(\xi)}{11!}\cdot\big(\frac{1}{3}\big)^{11}$

där $0 \le \xi \le \dfrac{1}{3}$, så $|\text{felet}| = \dfrac{1}{11\cdot 3^{11}}\left(\dfrac{1}{(1+\xi)^{11}} + \dfrac{1}{(1-\xi)^{11}}\right) \le \dfrac{1}{11}\left(\dfrac{1}{3^{11}} + \dfrac{1}{2^{11}}\right) \le 10^{-4}$

Differentialekvationer

P 9.1 (b) Integrerande faktor t.ex. $\exp(x^2)$,
allmän lösning $y = C\exp(-x^2)$

(c) $y = \exp(1-x^2)$



a b

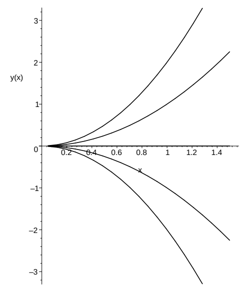
P 9.2 (a) $y = Ce^{3x} - \dfrac{9x^2+6x+2}{27}$ (b) $y = \dfrac{1}{2} + C\exp(-x^2)$ (c) $y = \dfrac{1}{3} + C\exp(-x^3)$

(d) $y = 1 + \dfrac{C}{1+x^2}$ (e) $y = -\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{C}{x^2}$ (f) $y = x^2 + C\sqrt{x}$

P 9.3 (a) $y = x^2 - \sqrt{x}$ (b) $y = x^2 - 32\sqrt{x}$ (c) $y = x^2 - 4\sqrt{x}$ (d) Lösning saknas

P 9.4 (a) Integrerande faktor $\dfrac{1}{x^2}$; allmän lösning $y = Cx^2$, $x > 0$

(b) $y = -\dfrac{3x^2}{4}$, $x > 0$



P 9.5 Allmän lösning $y = x\ln x - (x+1)\ln(x+1) + C(x+1)$; villkoret uppfylls med $C = 1$

P 9.6 $y = (Cx - 1 - \ln x)/(x+1)$

P 9.7 $y = \dfrac{x}{x+1}(x\sin x + \cos x + C)$; med $C = -1$ får man att $\dfrac{y}{x^3} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to 0+$

P 9.8 $y = 1 - \dfrac{\arctan x}{x}$, $x \ne 0$; gränsvärdet är 0

P 9.9 $y(x) = \dfrac{C + \sin x - (1/3)\sin^3 x}{\cos x}$; $C = 0$ ger den udda lösningen

P 9.10 (a) $y(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln\dfrac{x^2}{x^2+2x+5} - \arctan\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) Använd differentialekvationen: Funktionen y/x^2 har positiv derivata (varför?)

P 9.11 (a) $T(40) = 30$ grader. $T(t) = 20 + 40\exp\left(-t\dfrac{\ln 2}{20}\right)$, gränsvärdet $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 20$ grader

(b) $T(t) = T_0 + \big(T(0) - T_0\big) \exp\left(\dfrac{t}{t_1} \ln \dfrac{T_1 - T_0}{T(0) - T_0}\right)$

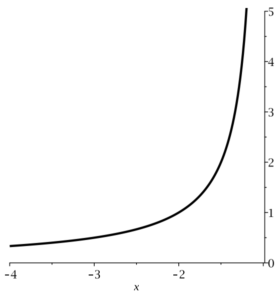
P **9.12** $y = x^2/4$

P **9.13** Den gemensamma punkten är $\left(a + \dfrac{1}{g(a)}, \dfrac{h(a)}{g(a)}\right)$

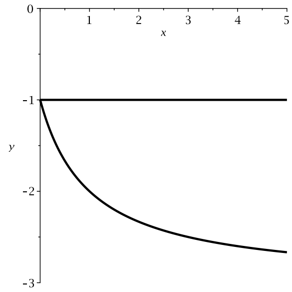
P **9.15** (a) $y = \dfrac{1}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $y = \dfrac{1}{x^4}$, $x > 0$ (c) $y = \dfrac{1}{x^4 - 16}$, $|x| < 2$ (d) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$

P **9.16** (a) $y(x) = -\dfrac{x+2}{3x+2}$, $x < -\dfrac{2}{3}$ (b) $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$

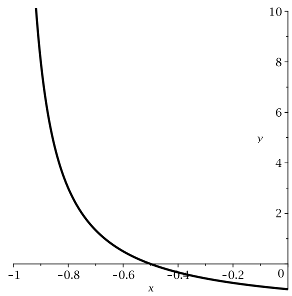
P **9.17** (a) $y = -\dfrac{1}{x+1}$, $x < -1$ (b) $y = -1$, $x > 0$ (c) $y = -\dfrac{3x+1}{x+1}$, $x > 0$ (d) $y = -\dfrac{2x+1}{x+1}$, $-1 < x < 0$



a

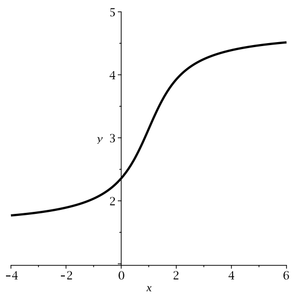


bc



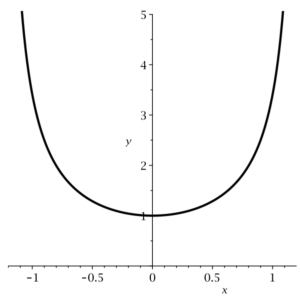
d

P **9.19** $y(x) = \arctan(x-1) + \pi$, $x \in \mathbb{R}$



P **9.20** $y = \ln(2e^{-x} + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

P **9.21** $y(x) = \tan\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $|x| < \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ ($\approx 1{,}25$)



P **9.22** $y(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{4(1+x^2)}{1-3x^2}$, $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

P **9.23** $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+8x^2}}$, $0 < x < 1$

P **9.24** Gränsvärdet existerar för $a = \sqrt{3}$ och är lika med $-1/2$ $\big(y(x) = 2\sin(x^2 + \pi/6) - 1\big)$

P **9.25** $y(x) = \left(\dfrac{3 - e^{\arctan x}}{3 + e^{\arctan x}}\right)^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$

P 9.26 (a) $xz' = z$, $x > 0$; $z = Cx$; $y = Cx^2$ (b) $\arctan\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$

P 9.27 $y = \tan(x + \pi/4) - x$, $\quad -3\pi/4 < x < \pi/4$

P 9.28 $y = e^{2t} + Ce^{t/2} = x^2 + C\sqrt{x}$

P 9.29 (a) $y(x) = 3\,e^{x}$ (b) $y(x) = 3\,e^{4-x}$ (c) $y(x) = -1$ (konstant funktion)

P 9.30 $y(x) = (1+x^2)\arctan x$

P 9.32 (a) $f(x) = cx$, c konstant (b) $f(x) = e^{cx}$, och $f(x) = 0$, c konstant

P 9.35 (b),(c) $y'(0)$ existerar inte annars

P 9.36 Ja!

P 9.37 (a) $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$, speciellt $y = e^{-x}\big(\cos 2x - (\sin 2x)/2\big)$
(b) $y = A\cos\big(x\sqrt{2}\big) + B\sin\big(x\sqrt{2}\big)$, speciellt $y = \cos\big(x\sqrt{2}\big) - \sqrt{2}\sin\big(x\sqrt{2}\big)$

P 9.38 (a) $y = Ae^{3x}$ (b) $y = A + Be^{-2x}$ (c) $y = (A + Bx + Cx^2)e^{-x}$ (d) $y = A + Bx + Ce^{x} + De^{-x}$

P 9.39 $y = A\cos x + B\sin x + Ce^{x} + De^{-x}$ $\quad (= A\cos x + B\sin x + E\cosh x + F\sinh x)$

P 9.40 $y = Ae^{-x} + e^{x/2}\left(B\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x/2}\left(D\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + E\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
(den karakteristiska ekvationen är $r^6 - 1 = 0$, $r \neq 1$, en binomisk ekvation)

P 9.42 $y = -(3/2)e^{-x} + (11/54)e^{-3x} + (1/27)(9x^2 - 24x + 35)$

P 9.43 $y = Ae^{-4x} + (B + x/5)e^{x} - x + 1$

P 9.44 $y = e^{-x}(\cos x\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\sqrt{2})$ har lokalt maximum i $y = 1$ (vad blir $y''(0)$?)

P 9.45 $y = x\ln x - x + 1$

P 9.46 $y = 2\cos\big(x\sqrt{2}\big) - \big(\sqrt{2}/2\big)\sin\big(x\sqrt{2}\big) + \sin x - \cos x$

P 9.47 $y = Ae^{-x} + B\cos x + C\sin x + x + x(\sin x - \cos x)/4$

P 9.48 $y = y_h + y_p$, där $y_h = A\cos x + B\sin x$ i samtliga deluppgifter och
(a) $y_p = -2\cos 2x + \sin 2x$ (b) $y_p = (x\sin x)/2$ (c) $y_p = -(x\cos x)/2$
(d) $y_p = (3x\cos x + 6x\sin x)/2$ (e) $y_p = (x^2\sin x + x\cos x)/4$ (f) $y_p = -(\sin 2x)/6$

P 9.49 (b) $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x^2\ln x$ (c) $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x^2\ln x - x - 1/2$

P 9.50 (a) $y'' + y' - 12y = 0$ (b) $y'' + y' - 12y = 13\cos x + \sin x$
(c) $y''' + y'' - y' - y = 4e^{x}$ (d) $y''' + 4y'' + 14y' + 20y = 9e^{-x}$

P 9.51 $y = (A - x/8)e^{-3x} - 1/15$

P 9.52 (a) $y = (x+1)e^{-x} - \cos x$ (b) $y = C(x+1)e^{-x} - \cos x$, $C > 1$ (jämför uppgift P 8.24)

P 9.53 (a) $y = xe^{-x} + \dfrac{3}{4}e^{-2x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}$ $\quad\left(y = (A+x)e^{-x} + Be^{-2x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4},\ y(0) = 0 = y'(0)\right)$
(b) Lokalt minimum (ty $y''(0) = 1 > 0$; hur får man det enkelt ur differentialekvationen?)

P 9.54 $y = e^{x}(A + Bx + x^2/12) + e^{-x}/8 + Ce^{-2x}$

P 9.55 $C = 0$, $B = \dfrac{1}{8} - A$ och $A > \dfrac{13}{24}$ i lösningen till uppgift P 9.54.

P 9.56 $y = (1/4)\big((x+1)e^{-x} + (x-1)e^{x}\big)$

P 9.57 Ja, lösningen är $y = e^{2x}\left(\cos 2x - \sin 2x - \dfrac{x^2}{8}\cos 2x + \dfrac{x}{16}\sin 2x\right)$ (hur ser du på enklaste sätt att det är fråga om ett lokalt maximum?); största/minsta värde saknas

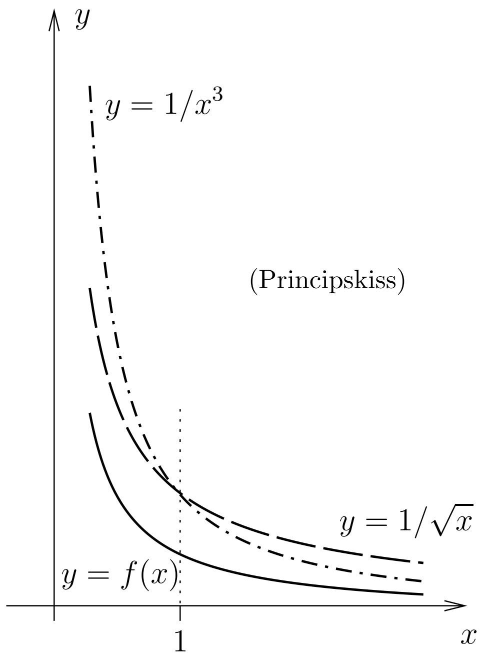
P 9.58 $y = 1 - e^{-x} + e^{-2x}(A\cos x + B\sin x - \cos 2x)$

P 9.59 (a) $vz'' + (2v' + av)z' = f$ (b) $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(A\cos x + B\sin x)$

P 9.61 x^4-termen, ty (1): $y = 1 - x^2/2 + x^4/12 + \mathcal{O}(x^6)$, (2): $y = 1 - x^2/2 + x^4/24 + \mathcal{O}(x^6)$

Serier och generaliserade integraler

P 10.1 (a)



(b) Endast $0 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ är användbar eftersom $\int_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ och $\int_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ är divergenta ($= \infty$).

(c) Endast $0 \le \int_1^\infty f(x)\,dx \le \int_1^\infty \dfrac{dx}{x^3} = \dfrac{1}{2}$ är användbar eftersom $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^3}$ och $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x^3}$ är divergenta ($= \infty$).

(d) $0 \le \int_0^\infty f(x)\,dx \le \dfrac{5}{2}$.

P 10.2 (a) $\dfrac{4}{3} \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \dfrac{8}{3}$ (b) $\dfrac{3}{4} \le \int_1^\infty f(x)\,dx \le \dfrac{3}{2}$ (c) $\dfrac{25}{12} \le \int_0^\infty f(x)\,dx \le \dfrac{25}{6}$

P 10.4 (a) —

(b) Ja, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent, och $0 \le \int_1^\infty f(x)\,dx \le 7/3$.

(c) —

(d) Nej, (c) ger inte besked eftersom den mindre integralen $\int_1^\infty g(x)\,dx$ är konvergent.

(e) —

(f) Ja, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent, men (e) ger ingen uppskattning av $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

P 10.5 (a) —

(b) Nej, (a) ger inte besked eftersom den större integralen $\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent.

(c) —

(d) Ja, $\int_0^1 f(x)\,dx$ är divergent ($=\infty$) eftersom den mindre integralen $\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent.

(e) —

(f) Ja, $\int_0^1 f(x)\,dx$ är divergent ($=\infty$).

P 10.7 (a) Serien är divergent (annars vore $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\big((a_k+b_k)-a_k\big)$ konvergent, en motsägelse)

(b) Ingenting säkert; serien är konvergent om t.ex. $b_k=-a_k$, divergent om t.ex. $a_k=b_k$

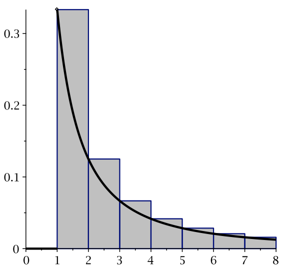
P 10.8 (a) $s_n = \sum_{k=2}^{n}\big(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\big) = \sqrt{n+1}-\sqrt{2}$ då $n \geq 2$, så $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$

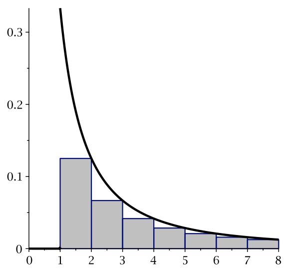
(b) Nej, ty termerna $= \sqrt{k+1}-\sqrt{k} = 1/\big(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\big) \to 0$ då $k \to \infty$

P 10.9 (b) $s \leq 5/6$ (c) redan $a_0+a_1 > 5/8$ (d) $0 <$ felet $= \sum_{k=3}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=3}^{\infty}\big(\frac{1}{5}\big)^k = \dfrac{(1/5)^3}{1-1/5} = \dfrac{1}{100}$

P 10.10 (a) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3b}{b+2}$ respektive $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{2(n+2)}$

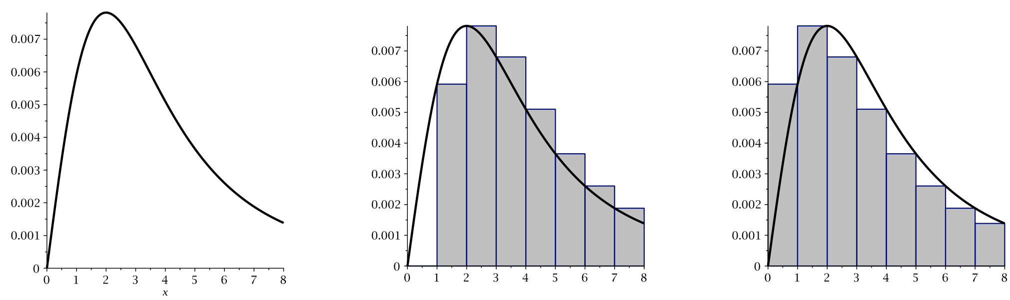
(b) $\dfrac{\ln 3}{2}$ respektive $\dfrac{3}{4}$

(c) 

(d) 

(e) Nej, eftersom integralen är divergent

P 10.11



(a) f är avtagande på $[2,\infty[$ (b) $n=2$ (c) $m=3$

(d) $A_1 = \dfrac{1}{169}+\dfrac{1}{32}$, $A_2 = \dfrac{1}{169}+\dfrac{1}{128}+\dfrac{1}{32}$ ($a_1=\dfrac{1}{169}$, $a_2=\dfrac{1}{128}$, $\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \dfrac{1}{32}$)

P 10.12 (a) T.ex. är $|a_k| \geq \dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq 0$ då $k \geq 3$ och $\sum_{k=3}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ är divergent, så $\sum_{k=3}^{\infty}|a_k|$ är också divergent.

(b) $n=9$ duger, ty $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ och $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^{3/2}} < 0$ då $x > e^2$, så f är avtagande mot noll åtminstone på $[9,\infty[$; således, $|a_k| = f(k) \searrow 0$ då $9 \leq k \to \infty$.

P **10.14** (a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, och detta är alltså den enda funktionen som löser problemet
(b) $\cosh x$ $(R = \infty)$ (c) $\dfrac{\cosh x + \cos x}{2}$ resp. $\dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{2}{3}e^{-x/2}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ $(R = \infty$ för båda$)$