Implikationer och likheter

David Rule

Implikation och likhet är viktiga begrepp inom matematik. Det är viktigt att alla förstår vad begreppen innebär och särskilt hur man använder notation för dem i olika sammanhang.

Implikation

En implikation är ett samband mellan påståenden. Om en slutsats B följer från ett antagande A säger vi att A medför B och vi använder notationen $A \implies B$. Man kan till exempel skriva

$$\text{"Jag har en broder"} \implies \text{"Jag har ett syskon"}$$

när det första påståendet medför det andra påståendet. Vi kan även skriva

$$\text{"Jag är gift"} \impliedby \text{"Jag har en fru"}$$

när det första påståendet är en konsekvens av det andra påståendet. Om två påståendena är ekvivalenta skriver vi till exempel

$$\text{"Jag bor i en fängelse"} \iff \text{"Jag är fånge"}.$$

Likhet

En likhet är ett samband mellan tal och betecknas med symbolen =. Det betyder att både led av likheten har samma värde och man skriver till exempel

$$1 + 1 = 2.$$

Det är också ett samband mellan uttryck eller funktioner av en okänt (eller känt) variabel. Berorende på sammanhanget gäller likheten för alla eller för något värde av variabeln. Så vi kan till exempel skriver

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \tag{1}$$

som gäller för alla x, eller

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

som endast gäller för några värden av x (i det här fallet, $x = 1$ och $x = 2$). Ibland använder vi likhet till exempel genom att skriva

$$f(x) = x^2 \quad \text{för alla } x \in \mathbf{R}$$

för att definiera värdet av en funktion f på varje x i sin definitionsmängd (som här är $\mathbf{R}$). Ett annat fall där man använder likhet är för att beteckna att två mängder är lika, så till exempel är $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

När är ett samband en implikation och när är det en likhet?

I vissa fall är det inte så lätt att veta om man ska använda sig av en likhetstecken eller en implikationspil. Huvudregeln är att man använder sig av en ekvivalenspil endast om de saker pilen syftar på är påståenden.

- Titta på exempel (1). Uttrycket $x^2 + 2x + 1$ är en omskrivning av $(x + 1)^2$ och ibland säger man till och med att uttrycken är ekvivalenta. Trots detta skriver vi att $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ eftersom varken $(x+1)^2$ eller $x^2 + 2x + 1$ är påståenden – för varje x är uttrycken lika med varandra.
- Ibland skriver man om en likhet med hjälp av trigonometriska eller andra formler. Till exempel är

$$\begin{aligned} & 0 = \cos(2\theta) + \cos\theta + 2 \\ \iff & 0 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos\theta + 2 \\ \iff & 0 = 2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta + 2 \\ \iff & 0 = 2\cos^2\theta + \cos\theta + 1. \end{aligned}$$

  Här skriver vi implikationspilar eftersom varje likhet är ett påstående och en omskrivning av den föregående. I de allra flesta fall inom matematik är påståenden mellan ekvivalenspilar antingen likheter eller olikheter, men påståenden kan också ta andra former. Det skulle vara konstigt (om inte fel) att skriva likheter här

Senast ändrad: 29 december 2023.

istället för implikationspilar för då skulle man växla mellan en ekvations vänsterled och omskrivningar av sin högerled. Däremot skulle det vara helt okej att som ett alternativ skriva

$$\begin{aligned}0 &= \cos(2\theta) + \cos\theta + 2\\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos\theta + 2\\ &= 2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta + 2\\ &= 2\cos^2\theta + \cos\theta + 1\end{aligned}$$

för då börjar man med den givna ekvationen och skriver om en led successivt för att få en kedje av likheter.

- Ibland under våra beräkningar använder vi oss av ett antagande eller ytterligare information. Till exempel när vi kontroller basfallet i ett induktionsbevis av likheten

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

sätter vi in $n = 1$ (det vill säga vi använder oss av informationen att indexet n har ett särskilt värde) i båda led: Då är

$$\sum_{k=1}^{n} k \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{n=1}}}{=} \sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad \text{och} \quad \frac{n(n+1)}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{n=1}}}{=} \frac{1\times(1+1)}{2} = 1.$$

Basfallet är bevisat eftersom $1 = 1$ och därför följer det från likheterna att även $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ om $n = 1$. Här får vi inte använda implikationspilar istället för likheter eftersom det handlar om samband mellan tal, inte påståenden. Om vi skriver

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{n=1}}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1\times(1+1)}{2} \Longrightarrow 1 = 1$$

är själva implikationspilar korrekt, men vi har inte bevisat basfallet. Vi har istället visat att basfallet är ett särskilt fall av påståendet som ska bevisas och därmed inte genomfört första steget i ett induktionsbevis. Däremot om vi vänder på pilarna får vi ett giltigt bevis av bassteget, trots att det möjligtvis inte känns som ett naturligt sätt att räkna:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{n=1}}}{\Longleftarrow} \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1\times(1+1)}{2} \Longleftarrow 1 = 1.$$

Som vanligt måste slutsatsen (här att $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ när $n = 1$) vara på pilens spets.

Vilken implikationspil är viktigt för mitt argument?

Vi har tre olika implikationspilar och de alla säger olika saker. Ibland gäller bara ett särskilt implikation och ibland vill man betona ett särskilt riktning i ett argument. Därför är det viktigt att ha koll på vilken man använder sig av.

- Ibland betraktar vi ekvationer i en variabel och är intresserad i att hitta värden av variabeln som löser en ekvation. Det gör vi enklast med ekvivalenser. Till exempel

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x-2)(x-1) = 0 \iff x = 2 \text{ eller } x = 1.$$

Ekvivalenspilar innehåll två budskap, de säger båda

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ eller } x = 1 \tag{2}$$

och

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longleftarrow (x-2)(x-1) = 0 \Longleftarrow x = 2 \text{ eller } x = 1. \tag{3}$$

Innehållet av (2) är att om $x^2 - 3x + 2 = 0$ har en lösning är de enda möjligheterna $x = 2$ eller $x = 1$ (så ekvationen inte kan ha fler än två lösningar), men vi inte har visat att ekvationen överhuvudtaget måste har en lösning. Innehållet av (3) är att om vi ta $x = 1$ eller $x = 2$ måste även $x^2 - 3x + 2 = 0$, så $x = 1$ och $x = 2$ är lösningar till ekvationen $x^2 - 3x + 2 = 0$ (fast inte nödvändigtvis de enda lösningar). Tillsammans säger (2) och (3) att ekvationen $x^2 - 3x + 2 = 0$ har precis två lösningar: $x = 1$ eller $x = 2$. Nycklen för att kunna skilja mellan de två budskapen är är att slutsatsen alltid sitter på pilarnas spets och antaganden på andra änden.

- Om vi vill visa att $\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{2n-3}{4n} = 1/2$ visar vi två saker: först att $1/2$ är en övrebegränsning av följden $\left(\frac{2n-3}{4}\right)_n$ och sen att varje tal mindre än $1/2$ inte är en övre begränsning av följden. För att visa att varje tal mindre än $1/2$ inte är en övre begränsning av följden vill vi visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $n \in \mathbf{Z}_+$ sådant att
$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{2n-3}{4n}.$$
så vi använder oss av implikationerna
$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{2n-3}{4n} \impliedby \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{3}{4n} \impliedby \varepsilon > \frac{3}{4n} \impliedby n > \frac{3}{4\varepsilon}.$$
Vi ser att det är möjligt (enligt den arkimediska egenskapen) att hitta ett tillräckligt stort n så att sista påståendet är sant, och därför följer första påståendet som en slutsats (eftersom det sitta på pilarnas spets). Rent aritmetisk kan man även skriver pilarna åt andra hållet, men den andra riktningen skulle inte hjälpa oss att hitta ett n så att $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{2n-3}{4n}$.

- Visa implikationer kan vi inte vända om. Till exempel
$$x + 4 = 6 \implies (x+4)^2 = 36.$$
Här kan vi inte skriver pilen till vänster (eller ekvivalens) eftersom det inte nödvändigtvis följer att $x+4 = 6$ om $(x+4)^2 = 36$ (för att det kan vara att $x + 4 = -6$ istället).