Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

Lärandemål I (ämneskunskap), II (riktighet och räknefärdighet) och III (kommunikation) examineras i alla uppgifter.

(1) Richard Feynmann var ett nobelpristagare i fysik. Under hans barndom lärde han sig följande trigonometrisk likhet från en annan pojke som hette Morrie Jacobs:

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}.$$

Därför heter likheten Morries lag.

(a) Med hjälp av additionsformler eller dubbelvinkel formler visa att

$$\cos(2^{n-1}\theta) = \frac{\sin(2^n\theta)}{2\sin(2^{n-1}\theta)}$$

för $n \in \mathbf{Z}$ och vinklar θ sådant att $\dfrac{2^{n-1}\theta}{\pi} \notin \mathbf{Z}$.

(b) Använd resultatet från (a) (tre gånger) för att bevisa Morries lag.

(2) Ge ett bevis av Bernoullis olikhet:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

för $x \geq -1$ och $n \in \mathbf{Z}_+$. Notera tydligt där du använder dig av antagandet $x \geq -1$.

(3) Visa att

$$\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{\sin(3\theta)}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(4) Betrakta funktionen $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som är definierad med hjälp av den naturliga exponentialfunktionen enligt formeln

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Med hjälp av de olikheterna du känner till för exponentialfunktionen visa att

$$\sinh x \geq \frac{x^2 + 2x}{2 + 2x}$$

för $x > -1$.

(5) Utifrån det du vet om den naturliga exponentialfunktionen visa att funktionen $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som är definierad i uppgift 4 är bijektiv. Ge den inversa funktionen.

(6) (a) Hitta alla lösningar $w \in \mathbf{C}$ till $w^2 = -\dfrac{2\sqrt{5}+10}{16}$.

(b) Hitta alla lösningar $w \in \mathbf{C}$ till $w^2 = \dfrac{2\sqrt{5}-10}{16}$.

(c) Visa att alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $z^2 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$ är

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}.$$

(7) Vi kan enkelt lösa ekvationen

$$z^5 - 1 = 0$$

för z i polär form och får att lösningarna är

$$z = e^{2k\pi i/5} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$$

för $k = -2, -1, 0, 1,$ och 2.

(a) Skissa en bild av de givna lösningarna z i den komplexa planet.

(b) Förenkla

$$(z-1)\left(z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1\right)\left(z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1\right).$$

(c) Med hjälp av lösningarna från uppgift 6(c) räkna ut

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{och} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Motivera noggrant ditt svar!