**TATB04/TEN3** **Tentamen, 2021-08-18**

**Inledande matematisk analys**

**1.** Avgör utan bevis vilka eller vilken av följande påståenden är sanna eller falska.

(a) $x^2 - x - 1 = 0 \implies x = (1+\sqrt{5})/2$;

(b) $x^2 - x - 1 = 0 \impliedby x = (1+\sqrt{5})/2$;

(c) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

---

**Solution:**

(a) Falskt

(b) Sant

(c) Falskt

---

**2.** Beskriv mängden av alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till ekvationen

$$|z + 3 + 4i| = 2|z|.$$

---

**Solution:** Vi kan beräkna att

$$\begin{aligned}
&|z+3+4i| = 2|z| \\
&\iff (x+3)^2 + (y+4)^2 = 4(x^2+y^2) \\
&\iff 3x^2 - 6x - 9 + 3y^2 - 8y - 16 = 0 \\
&\iff 3\,(x-1)^2 - 3 - 9 + 3\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} - 16 = 0 \\
&\iff (x-1)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}.
\end{aligned}$$

Därför är mängden av alla lösningar $z$ en cirkel i komplexa planet med radien $10/3$ och medelpunkten $1 + 4i/3$.

---

**3.**

(a) Bevisa att

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Visa att $x = \sin\frac{\pi}{9}$ är en lösning till ekvationen

$$x^3 - \frac{3}{4}x = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

---

**Solution:**

(a) Vi beräknar att

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= \sin(2\theta + \theta) \\
&= \sin(2\theta)\cos\theta + \cos(2\theta)\sin\theta \\
&= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta(1 - \sin^2\theta) - \sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.
\end{aligned}$$

(b) Om vi tar $\theta = \frac{\pi}{9}$ är $\sin(3\theta) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}/2$ och $3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3x - 4x^3$ för $x = \sin\theta$. Därför enligt likheten i del (a) är

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 3x - 4x^3 \implies x^3 - \frac{3}{4}x = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

---

**4.** Bevisa att påståendet

"$n^3 + 2n$ är delbart med 3"

är sant för varje positivt heltal $n$.

---

**Solution:**

Vi ger ett induktionsbevis. I basfallet $n = 1$ kan vi se direkt att $1^3 + 2 \times 1 = 3$ är delbart med 3. För att bevisa induktionssteget antar vi att $n^3 + 2n$ är delbart med 3 och betrakta $(n+1)^3 + 2(n+1)$:

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n+1) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1).$$

Eftersom $(n+1)^3 + 2(n+1)$ kan skrivas som en summa av två termer som är delbart med 3 måste $(n+1)^3 + 2(n+1)$ också vara delbart med 3 och vi har bevisat induktionssteget. Enligt induktionsprincipen har vi bevisat att $n^3 + 2n$ är delbart med 3 för alla positiva heltal $n$.

---

**5.**

Vilket eller vilka $x$ löser ekvationen

$$\ln(2 - |x|) + \ln(4 - x) = \ln 8?$$

---

**Solution:**

För att vänsterledet är definierad behöver vi att $|x| < 2$ och $x < 4$. De två villkoren är uppfyllde om och endast om $-2 < x < 2$. Om $-2 < x < 2$ kan vi beräkna att

$$\begin{aligned}
\ln(2 - |x|) + \ln(4 - x) = \ln 8 &\iff \ln\left((2 - |x|)(4 - x)\right) = \ln 8 \\
&\iff (2 - |x|)(4 - x) = 8.
\end{aligned}$$

Om $0 \le x < 2$ är

$$(2 - |x|)(4 - x) = 8 \iff (2 - x)(4 - x) = 8 \iff x^2 - 6x = 0$$

som har lösningar $x = 0$ och $x = 6$. Därför är $x = 0$ den enda giltig lösning i intervallet $0 \leq x < 2$.

Om $-2 < x < 0$ är

$$(2 - |x|)(4 - x) = 8 \iff (2 + x)(4 - x) = 8 \iff x^2 - 2x = 0$$

som har lösningar $x = 0$ och $x = 2$. Eftersom varken $x = 0$ eller $x = 2$ ligger i intervallet $-2 < x < 0$ har vi inga lösningar i detta intervall.

Därför är $x = 0$ den unika lösningen till ekvationen $\ln(2 - |x|) + \ln(4 - x) = \ln 8$.

---

**6.**

Beräkna summan av följande aritmetiska summa:

$$5 + 7 + 9 + \cdots + 203.$$

---

**Solution:**

Vi beräknar att

$$\begin{aligned} 5 + 7 + 9 + \cdots + 203 &= \sum_{k=1}^{100} (2k + 3) = 2 \left( \sum_{k=1}^{100} k \right) + 3 \times 100 \\ &= 100 \times 101 + 3 \times 100 = 10400. \end{aligned}$$

---

**7.**

Vilka $x$ uppfyller ekvationen

$$e^{2x} - 9e^x + 14 = 0?$$

---

**Solution:** Ekvationen är en andragradspolynom i $y = e^x$ så vi söker lösningarna $y$ till $y^2 - 9y + 14 = 0$. Vi räknar ut att

$$y^2 - 9y + 14 = 0 \iff \left( y - \frac{9}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

så lösningarna är $y = 2$ och $y = 7$. Därför uppfyller $x = \ln 2$ och $x = \ln 7$ ekvationen $e^{2x} - 9e^x + 14 = 0$.

---