

Inledande matematisk analys

1. Ge ett induktionsbevis av formeln

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} \quad (*)$$

där a_1, a_2, \dots, a_{n+1} är givna tal och $n \in \mathbf{Z}_+$.

Solution: När $n = 1$ kan vi beräkna att

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^1 (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2$$

och

$$a_1 - a_{n+1} = a_1 - a_2$$

så $(*)$ är bevisat för $n = 1$.

Under antagandet att $(*)$ är sant för något $n = \ell$ kan vi betrakta att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell+1} (a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{\ell} (a_k - a_{k+1}) + (a_{\ell+1} - a_{\ell+2}) \\ &= (a_1 - a_{\ell+1}) + (a_{\ell+1} - a_{\ell+2}) = a_1 - a_{\ell+2} \end{aligned}$$

som är $(*)$ med $n = \ell + 1$.

Därför enligt induktionsaxiomen är $(*)$ bevisat för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

2. Med hjälp av $(*)$ bevisa att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (\dagger)$$

för varje $n \in \mathbf{Z}_+$. Ett direkt induktionsbevis av (\dagger) ger noll poäng. Tips: Ta $a_k = 1/k$.

Solution: Om $a_k = 1/k$ säger $(*)$ att

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

men

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

och

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

så (\dagger) är bevisad.

3. Låt x och y vara två positiva tal sådana att $3^x = 8^y = 24^5$. Vad är $xy/(x+y)$?

Solution: Vi vet att $3 = 24^{5/x}$ och $8 = 24^{5/y}$, så

$$3 \times 8 = 24^{5/x} \cdot 24^{5/y} = 24^{5/x+5/y} \implies 1 = \frac{5}{x} + \frac{5}{y} \implies \frac{1}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Men $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$, så $\frac{xy}{x+y} = 5$.

4.

Lös ekvationen

$$2 \arctan\left(\frac{4}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan \theta$$

för θ . Det kan vara nyttigt att använda sig av sambanden mellan geometri i planet och komplexa tal.

Solution: Vi vet att $\arctan\left(\frac{4}{7}\right) = \text{Arg}(7+4i)$ och $\arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \text{Arg}(4+i)$ och båda vinklar är mellan 0 och $\pi/4$, så $2 \arctan\left(\frac{4}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$ är principalaargumentet av $(7+4i)^2(4+i) = 76 + 257i$. Men $\text{Arg}(76+257i) = \arctan(257/76)$ så $\theta = 257/76$.

5.

- (a) Ge definitionen av begreppet *supremum* till en följd $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ av reella tal.
 - (b) Visa att $\sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \frac{2n}{3n+5} = \frac{2}{3}$.
-

Solution:

- (a) Ett tal α kallas för supremum till en följd $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ om:

- (i) $a_n \leq \alpha$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$; och
- (ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det ett $n \in \mathbf{Z}_+$ sådant att $\alpha - \varepsilon < a_n$.

- (b) Vi beräknar att

$$\frac{2n}{3n+5} \leq \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3},$$

så $2/3$ är en övre begränsning till $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$. Och för $\varepsilon > 0$ har vi att

$$\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2n}{3n+5} \iff \frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2}{3} - \frac{10}{9n+15} \iff \varepsilon > \frac{10}{9n+15} \iff n > \frac{10}{9\varepsilon} - \frac{15}{9}$$

så genom att välja ett $n > \frac{10}{9\varepsilon} - \frac{15}{9}$ hittar vi ett n sådant att $2/3 - \varepsilon < a_n$.

Vi har därför bevisat att $\sup_n a_n = 2/3$.

6.

Använd trigonometriska likheterna

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \varphi) &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi, \\ \sin(\theta + \varphi) &= \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi\end{aligned}$$

och

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$(\theta, \varphi \in \mathbf{R})$ för att visa

$$\cos(3\theta) = \cos \theta(1 - 4 \sin^2 \theta)$$

och

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

Solution:

Man kan räkna ut att

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta) \cos \theta - \sin(2\theta) \sin \theta \\ &= \cos(\theta + \theta) \cos \theta - \sin(\theta + \theta) \sin \theta \\ &= (\cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta) \cos \theta - (\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta) \sin \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos \theta(\cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) \\ &= \cos \theta(1 - 4 \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

Och därför är

$$\cos(3\theta) = \cos \theta(1 - 4 \sin^2 \theta)$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

Vi kan också räkna ut att

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

7.

(a) Visa att $\sin(2\theta) = \cos(3\theta)$ om $\theta = \frac{\pi}{10}$.

(b) Med hjälp av (a) och resultaten i uppgift 6 visa att $\theta = \frac{\pi}{10}$ är en lösning till

$$2 \sin \theta = 1 - 4 \sin^2 \theta.$$

(c) Med hjälp av ekvationen i (b) visa att

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Solution:

(a) Vi vet att $\cos \phi = \sin(\phi + \frac{\pi}{2})$ för alla $\phi \in \mathbf{R}$ sa

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{10}\right)$$

men $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$ för alla $\phi \in \mathbf{R}$ så om vi tar $\phi = 2\pi/10$ får vi att $\sin\left(\frac{8\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$. Tillsammans får vi att $\cos(3\theta) = \sin(2\theta)$ om $\theta = \frac{\pi}{10}$.

(b) För $\theta = \frac{\pi}{10}$ är

$$2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{upp. 4}}}{\sin \theta} \cos \theta = \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{a})}}{\sin(2\theta)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{upp. 4}}}{\cos(3\theta)} = \cos \theta (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

och därför är

$$2 \sin \theta = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

eftersom $\cos(\pi/10) > 0$ så $\cos \theta$ kan strykas.

(c) Vi låter $t = \sin(\frac{\pi}{10})$ och löser $4t^2 + 2t - 1 = 0$:

$$4t^2 + 2t - 1 = 0 \iff 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Eftersom $\sin(\pi/10) > 0$ förkastar vi lösningen $t = (-1 - \sqrt{5})/4$ och får att

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$
