TATB04/TEN3 **Tentamen, 2022-08-17**

Inledande matematisk analys

1.

(a) För vilka reella tal c gäller implikationen

$$a < b \implies ac < bc?$$

Du behöver *inte* motivera ditt svar.

(b) Ge ett bevis av följande implikation:

$$x > \frac{7}{2} \implies x(x-2) > 5.$$

Solution:

(a) Implikationen gäller om och endast om $c > 0$.

(b) Vi vet att $x > \frac{7}{2}$ så vi också har att $x - 2 > \frac{3}{2}$. Genom att multiplicera den första likheten med $\frac{3}{2}$ och den andra med x (som vi vet är positivt) får vi att $\frac{3x}{2} > \frac{3\times 7}{2\times 2}$ och $x(x-2) > \frac{3x}{2}$. Därför får vi att

$$x(x-2) > \frac{3x}{2} > \frac{3\times 7}{2\times 2} > 5.$$

---

2. Betrakta intervallet

$$I = \left]3, \frac{10}{3}\right[= \left\{x \in \mathbf{R} \colon 3 < x < \frac{10}{3}\right\}.$$

(a) Definiera begreppet *största elementet* av ett intervall.

(b) Bevisa att intervallet I inte har något största element. [Tips: Ge gärna ett motsägelsebevis.]

Solution:

(a) Ett *största element* i ett intervall I är ett element $x \in I$ sådant att $a \leq x$ för alla $a \in I$.

(b) Vi antar att x är det störta elementet av intervallet $I =]3, 10/3[$. I så fall är $x \in I$ (så $3 < x < 10/3$) och $a \leq x$ för alla $a \in I$. Vi betrakta talet

$$y = \frac{3x+10}{6}.$$

Eftersom $3 < x < 10/3$ är

$$3 < \frac{3\times 3 + 10}{6} < \frac{3x+10}{6} < \frac{3\times\frac{10}{3}+10}{6} = \frac{10}{3},$$

så $y \in I$ och

$$y = \frac{3x+10}{6} = \frac{x}{2} + \frac{10}{6} > \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x.$$

Men att $y \in I$ och $y > x$ är motsägelsefullt med att $a \leq x$ för alla $a \in I$. Därför kan I inte har något största element.

3.

(a) Ange medelpunkt och radie för cirkeln som ges av ekvationen

$$x^2 + y^2 = y - 3x.$$

(b) Faktorisera polynomet

$$p(x) = 9x^3 - 3x^2 - 5x - 1$$

så långt som möjligt.

Solution:

(a) Vi skriver om

$$x^2 + y^2 = y - 3x \iff x^2 + 3x + y^2 - y = 0 \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

så medelpunkten är $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ och radien är $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

(b) Vi kan enkelt gissa att $x = 1$ är en lösning och polynomdivision ger sedan att

$$p(x) = (x - 1)(9x^2 + 6x + 1).$$

Vi kan också kvadradkompletera för att se att

$$p(x) = 9(x-1)\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 9(x-1)\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = (x-1)(3x+1)^2.$$

---

4. Betrakta ekvationen

$$y = \sqrt{\frac{2 + \ln x}{7 \ln x}}.$$

(a) För vilka x är uttrycket $\sqrt{\frac{2+\ln x}{7 \ln x}}$ definierad?

(b) Vilka värden kan y anta? (Det vill säga, för vilka y finns det ett x sådant att $y = \sqrt{(2 + \ln x)/(7 \ln x)}$?)

Solution:

(a) Först utreder vi för vilka b uttrycket $\sqrt{\frac{2+b}{7b}}$ är definierad: Det krävs att

$$\frac{2 + b}{7b} = \frac{2}{7b} + \frac{1}{7}$$

är definierad och icke-negativt för att kunna ta kvadratroten. Det gäller om och endast om $b \leq -\frac{1}{2}$ eller $b > 0$. Sedan är $b = \ln x$, så uttrycket är definierad om och endast om

$$0 < x \leq e^{-1/2} \quad \text{eller} \quad x > 1.$$

(b) Vi har att

$$y = \sqrt{\frac{2+\ln x}{7\ln x}} = \sqrt{\frac{2}{7b} + \frac{1}{7}} \quad \text{med } b \leq -1/2 \text{ eller } b > 0.$$

Därför kan y antar alla värdena i intervallen $[0, \sqrt{\frac{1}{7}}[$ och $]\sqrt{\frac{1}{7}}, \infty[$.

5.

Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^4 + (4-i)z^2 + 3 = 3i$.

Solution: Vi skriver om ekvationen till

$$z^4 + (4-i)z^2 + 3 - 3i = 0$$

och sedan kvadratkompletterar vänsterledet och får att

$$z^4 + (4-i)z^2 + 3 - 3i = \left(z^2 + \frac{4-i}{2}\right)^2 - \left(\frac{4-i}{2}\right)^2 + 3 - 3i$$
$$= \left(z^2 + \frac{4-i}{2}\right)^2 - \frac{3+4i}{4}.$$

Därför tar vi $w = z^2 + \frac{4-i}{2}$ och letar efter w sådant att

$$w^2 = \frac{3+4i}{4}.$$

Låt $w = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$. Då får vi att $x^2 - y^2 = 3/4$ och $2xy = 1$ och de två ekvationerna kan vi lösa för att få

$$w = \frac{2+i}{2} \quad \text{eller} \quad w = -\frac{2+i}{2}.$$

Vi har nu två ekvationer att lösa:

$$z^2 + \frac{4-i}{2} = \frac{2+i}{2} \quad \text{och} \quad z^2 + \frac{4-i}{2} = -\frac{2+i}{2}.$$

De kan vi lösa på ett liknande sätt till hur vi hittade w och vi beräknar att lösningarna är

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right) \quad \text{och} \quad \pm\sqrt{3}i.$$

Om man inte har visat att de fyra lösningarna är ekvivalenta med ekvationen i uppgiften (utan endast har visat att de är de enda möjliga lösningarna) behöver man kontrollera att de faktiskt är lösningar genom att sätta in de i ekvationen.

6.

Förenkla uttrycket

$$\frac{1+\tanh(x/2)}{1-\tanh(x/2)}$$

där den *hyperboliska tangentfunktionen* tanh definieras enligt formeln

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{för alla } x \in \mathbf{R}.$$

Solution: Vi beräknar att

$$\frac{1+\tanh(x/2)}{1-\tanh(x/2)} = \frac{1+\left(\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}\right)}{1-\left(\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}\right)} = \frac{(e^{x/2}+e^{-x/2})+(e^{x/2}-e^{-x/2})}{(e^{x/2}+e^{-x/2})-(e^{x/2}-e^{-x/2})} = \frac{e^{x/2}+e^{x/2}}{e^{-x/2}+e^{-x/2}} = e^x.$$

7.

(a) Bevisa att $\cos(3\theta) = 2\cos\theta\cos(2\theta) - \cos\theta$ för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Genom att ta $\theta = \pi/12$ i likheten från del (a) visa att

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Solution:

(a) Med hjälp av additionsformler ser vi att

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \quad \text{och}\\ \cos(\theta) &= \cos(2\theta-\theta) = \cos(2\theta)\cos\theta + \sin(2\theta)\sin\theta.\end{aligned}$$

Så om vi adderar båda likheter får vi att

$$\cos(3\theta) + \cos(\theta) = 2\cos(2\theta)\cos\theta$$

som är det vi vill bevisa.

(b) Med $\theta = \pi/12$ är likheten

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

och med hjälp av de exakta värdena vi lärde oss om i kursen säger det att

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{3}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

så

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$