**TATB04/TEN3** **Tentamen, 2023-03-20**

**Inledande matematisk analys**

**1.**

Betrakta olikheten

$$12n \leq 2^n \qquad ((*)_n)$$

där $n \in \mathbf{Z}_+$.

(a) Bevisa att $(*)_m \implies (*)_{m+1}$ för $m \geq 4$.

(b) För precis vilka $n$ är $(*)_n$ sant? Motivera ditt svar.

---

**Solution:**

(a) Vi antar att $(*)_m$ är sant och kan därmed beräkna att

$$12(m+1) = 12m+12 \underset{(*)_m}{\overset{\uparrow}{\leq}} 2^m+12 \leq 2^m+16 \leq 2^m+2^4 \underset{m \geq 4}{\overset{\uparrow}{\leq}} 2^m+2^m = 2^{m+1}.$$

Därmed har vi visat att $(*)_m \implies (*)_{m+1}$ för $m \geq 4$.

(b) För att avgör för vilka $n$ $(*)_n$ är sant vi börjar genom att kontrollera

$$\begin{aligned}
&12 \times 1 = 12 > 2 = 2^1,\\
&12 \times 2 = 24 > 4 = 2^2,\\
&12 \times 3 = 36 > 8 = 2^3,\\
&12 \times 4 = 48 > 16 = 2^4,\\
&12 \times 5 = 60 > 32 = 2^5,\\
&12 \times 6 = 72 > 64 = 2^6, \quad \text{och}\\
&12 \times 7 = 84 \leq 128 = 2^7.
\end{aligned}$$

så $(*)_n$ är falsk för $n = 1, 2, \ldots, 6$ men sant för $n = 7$. Fallet $n = 7$ kan användas som bassteget i ett induktionsbevis och del (a) är induktionssteget. Därför enligt induktionsprincipen är $(*)_n$ också sant för alla $n > 7$.

---

**2.**

(a) Ge ett exempel av en mängd som har ett supremum men inte har ett största element. Du måste inte motivera ditt svar.

(b) Bevisa att

$$\sup_n \frac{2n-3}{6n} = \frac{1}{3}.$$

---

**Solution:**

(a) Till exempel, intervallet $(1, 5) = \{x \in \mathbf{R} \colon 1 < x < 5\}$.

(b) (Obs: Här menar jag förstås att $n \in \mathbf{Z}_+$.) Först kan vi beräkna att

$$\frac{2n-3}{6n} \leq \frac{2n}{6n} = \frac{1}{3},$$

så $\frac{1}{3}$ är en övrebegränsning till följden.

Sedan kan vi för varje $\varepsilon > 0$ beräkna att

$$\frac{1}{3} - \varepsilon < \frac{2n-3}{6n} \Longleftarrow \frac{1}{3} - \varepsilon < \frac{1}{3} - \frac{3}{6n} \Longleftarrow \varepsilon > \frac{3}{6n} \Longleftarrow n > \frac{3}{6\varepsilon},$$

så om vi väljer $n > \frac{3}{6\varepsilon}$ är $\frac{1}{3} - \varepsilon < \frac{2n-3}{6n}$ och vi ser att $\frac{1}{3} - \varepsilon$ inte är en övrebegränsning för något $\varepsilon > 0$. Därmed är $\sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \frac{2n-3}{6n} = \frac{1}{3}$.

---

**3.**

(a) Skriv

$$\frac{4+5i}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}$$

i formen $x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) Finn alla lösningar $w \in \mathbf{C}$ till

$$w^2 = \frac{3+4i}{4}.$$

---

**Solution:**

(a) Vi beräknar att

$$\frac{4+5i}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i} = \frac{2(4+5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2(4+15+5i-12i)}{10} = \frac{19}{5} - \frac{7}{5}i.$$

(b) Låt $w = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$. Då får vi att $x^2 - y^2 = 3/4$ och $2xy = 1$ och de två ekvationerna kan vi lösa för att få

$$w = \frac{2+i}{2} \quad \text{eller} \quad w = -\frac{2+i}{2}.$$

---

**4.** Under kursens gång har vi sett många olika trigonometriska likheten. Med hjälp av additionsformler kan man skriva om $\cos(n\theta)$ och $\sin(n\theta)$ (där $n \in \mathbf{Z}_+$) som polynom av $\cos\theta$ och $\sin\theta$. Den här uppgiften visar att resultaten alltid tar ett särskilt form.

Ge ett induktionsbevis att det för varje $n \in \mathbf{Z}_+$ finns polynom $p_n(x)$ och $q_n(x)$ sådana att

$$\cos(n\theta) = p_n(\cos\theta) \quad \text{och} \quad \sin(n\theta) = q_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

**Solution:**

För basfallet ser vi direkt att sådana polynom finns: vi har att $p_1(x) = x$ och $q_1(x) = 1$ eftersom

$$\cos(1 \times \theta) = \cos\theta \quad \text{och} \quad \sin(1 \times \theta) = 1 \times \sin\theta.$$

För induktionssteget antar vi att den för något $n \in \mathbf{Z}_+$ finns polynom $p_n(x)$ och $q_n(x)$ sådana att

$$\cos(n\theta) = p_n(\cos\theta) \quad \text{och} \quad \sin(n\theta) = q_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

och beräknar att

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\theta) &= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta = p_n(\cos\theta)\cos\theta - q_n(\cos\theta)\sin^2\theta \\ &= p_n(\cos\theta)\cos\theta - q_n(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)\end{aligned}$$

så vi ser att $p_{n+1}(x) = p_n(x)x - q_n(x)(1-x^2)$. Samtidigt kan vi också beräkna att

$$\begin{aligned}\sin((n+1)\theta) &= \sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta = q_n(\cos\theta)\cos\theta\sin\theta + p_n(\cos\theta)\sin\theta \\ &= (q_n(\cos\theta)\cos\theta + p_n(\cos\theta))\sin\theta\end{aligned}$$

så vi ser att $q_{n+1}(x) = q_n(x)x + p_n(x)$. Därmed har vi visat att polynom $p_{n+1}$ och $q_{n+1}$ finns under antagandet att $p_n$ och $q_n$ finns.

Enligt induktionsprincipen finns det för varje $n \in \mathbf{Z}_+$ polynom $p_n(x)$ och $q_n(x)$ sådana att

$$\cos(n\theta) = p_n(\cos\theta) \quad \text{och} \quad \sin(n\theta) = q_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

---

**5.** Skissa grafen av funktionen $f(x) = b^x$ där:

(a) $b > 1$;

(b) $b = 1$; och

(c) $0 < b < 1$.

---

**Solution:**

---

**6.**

Logaritmen av $a$ i basen 10 definieras enligt formeln

$$\log_{10}(a) := \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$$

för $a > 0$. Världens första logaritmtabell innehöll värdena $\log_{10}(n)$ för alla heltal $n = 1, \ldots, 1000$.

Vilket värde eller vilka värden från tabellen behöver man slå upp för att beräkna

$$\log_{10}(6{,}735)?$$

Motivera ditt svar!

**Solution:**

Vi kan, till exempel, skriva

$$\log_{10}(6{,}735) = \log_{10}\left(\frac{3 \times 5 \times 449}{1000}\right) = \log_{10}(3) + \log_{10}(5) + \log_{10}(449) - \log_{10}(1000)$$

så vi behöver slå upp $\log_{10}(3)$, $\log_{10}(5)$, $\log_{10}(449)$ och möjligtvist $\log_{10}(1000) = 3$.

---

**7.**

(a) Visa att uttrycket

$$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$$

(där $a, b \in \mathbf{R}$) inte beror på $b$.

(b) Visa att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$

---

**Solution:**

(a) Enligt additions- och subtraktionsformler för trigonometriska funktioner är

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} \\
&= \frac{(\sin a \cos b + \cos a \sin b) + (\sin a \cos b - \cos a \sin b)}{(\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b)} \\
&= \frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} = \tan a
\end{aligned}$$

som inte beror på $b$.

(b) Om vi tar $a = (x+y)/2$ och $b = (x-y)/2$ i likheten ovan får vi att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

---