TATB04/TEN3 **Tentamen, 2023-08-16**

Inledande matematisk analys

1.

Nedan finns en lista över olika steg man skulle kunna tänka genomföra i ett induktionsbevis. Välj ut stegen du behöver för att genomföra ett korrekt induktionsbevis av $P(n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, där $P(n)$ är ett påstående som beror på $n \in \mathbf{Z}_+$.

(a) Bevisa att $P(n) \implies P(n+1)$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.

(b) Bevisa att $P(n+1) \implies P(n)$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.

(c) Bevisa att $P(n)$ är sant för något jämnt $n \in \mathbf{Z}_+$.

(d) Bevisa att $P(1)$ är sant.

(e) Anta att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

(f) Genom att hänvisa till induktionsaxiomet, notera att vi har genomfört alla steg som behövs för ett fullständigt induktionsbevis, och därmed är bevisat att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Solution:

Stegen man behöver är (d), (a) och möjligtvis (f).

En vanlig misstag: Vissa studenter skriver upp induktionsteget (a) i två delsteg: Man först antar att $P(n)$ är sant för något $n \in \mathbf{Z}_+$; och sedan bevisar att $P(n+1)$ är sant under detta antagande. Det är helt okej, men notera att det inte är samma sak att anta $P(n)$ är sant för *något* $n \in \mathbf{Z}_+$ som att anta $P(n)$ är sant för *alla* $n \in \mathbf{Z}_+$ - för då har man antagit allt man ska bevisa. Därför är det fel att säga (e) är en del av ett korrekt induktionsbevis.

2.

(a) Om en mängd har ett största element, vad kan man säga om mängdens ~~största~~ minsta övre begränsningen?

(b) Bevisa att

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \frac{7n-3}{5n} = \frac{7}{5}.$$

Solution:

(a) Om en mängd har ett största element så har den också en största övre begränsningen och båda talen är lika. [På grund av mitt fel i uppgiften fick alla studenter en poäng för deluppgiften.]

(b) Först kan vi beräkna att

$$\frac{7n-3}{5n} \leq \frac{7n}{5n} = \frac{7}{5},$$

så $\frac{7}{5}$ är en övrebegränsning till följden.

Sedan kan vi för varje $\varepsilon > 0$ beräkna att

$$\frac{7}{5} - \varepsilon < \frac{7n-3}{5n} \Longleftarrow \frac{7}{5} - \varepsilon < \frac{7}{5} - \frac{3}{5n} \Longleftarrow \varepsilon > \frac{3}{5n} \Longleftarrow n > \frac{3}{5\varepsilon},$$

så om vi väljer $n > \frac{3}{5\varepsilon}$ är $\frac{7}{5} - \varepsilon < \frac{7n-3}{5n}$ och vi ser att $\frac{7}{5} - \varepsilon$ inte är en övrebegränsning för något $\varepsilon > 0$. Därmed är $\sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \frac{7n-3}{5n} = \frac{7}{5}$.

3.

(a) Skriv

$$\frac{(6+5i)(4-i)}{10+i}$$

i formen $x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) Finn alla lösningar $w \in \mathbf{C}$ till

$$w^2 = -13 + 84i.$$

Solution:

(a) Vi beräknar att

$$\frac{(6+5i)(4-i)}{10+i} = \frac{29+14i}{10+i} = \frac{(29+14i)(10-i)}{(10+i)(10-i)} = \frac{304}{101} + \frac{111}{101}i.$$

(b) Låt $w = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$. Då får vi att $x^2 - y^2 = -13$ och $2xy = 84$ och de två ekvationerna kan vi lösa för att få

$$w = 6 + 7i \quad \text{eller} \quad w = -6 - 7i.$$

---

4. Under kursens gång har vi sett många olika trigonometriska likheten. Med hjälp av additionsformler kan man skriva om $\cos(n\theta)$ och $\sin(n\theta)$ (där $n \in \mathbf{Z}_+$) som polynom av $\cos\theta$ och $\sin\theta$. Den här uppgiften visar att resultaten alltid tar ett särskilt form.

Betrakta följande påstående som beror på ett positivt tal n: Det finns polynom $p_n(x)$ och $q_n(x)$ sådana att

$$\cos(n\theta) = p_n(\cos\theta) \quad \text{och} \quad \sin(n\theta) = q_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

Notera att påståendet är sant för $n = 1$ eftersom om vi testar $p_1(x) = x$ och $q_1(x) = 1$ kan vi bekräfta att

$$\cos(1 \times \theta) = \cos\theta = p_1(\cos\theta) \quad \text{och} \quad \sin(1 \times \theta) = 1 \times \sin\theta = q_1(\cos\theta)\sin\theta.$$

Ge ett induktionsbevis att påståendet är sant för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.

Solution:

För basfallet ser vi direkt att sådana polynom finns: vi har att $p_1(x) = x$ och $q_1(x) = 1$ eftersom

$$\cos(1 \times \theta) = \cos\theta \quad \text{och} \quad \sin(1 \times \theta) = 1 \times \sin\theta.$$

För induktionssteget antar vi att den för något $n \in \mathbf{Z}_+$ finns polynom $p_n(x)$ och $q_n(x)$ sådana att

$$\cos(n\theta) = p_n(\cos\theta) \quad \text{och} \quad \sin(n\theta) = q_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

och beräknar att

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\theta) &= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta = p_n(\cos\theta)\cos\theta - q_n(\cos\theta)\sin^2\theta \\ &= p_n(\cos\theta)\cos\theta - q_n(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)\end{aligned}$$

så vi ser att $p_{n+1}(x) = p_n(x)x - q_n(x)(1-x^2)$. Samtidigt kan vi också beräkna att

$$\begin{aligned}\sin((n+1)\theta) &= \sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta = q_n(\cos\theta)\cos\theta\sin\theta + p_n(\cos\theta)\sin\theta \\ &= (q_n(\cos\theta)\cos\theta + p_n(\cos\theta))\sin\theta\end{aligned}$$

så vi ser att $q_{n+1}(x) = q_n(x)x + p_n(x)$. Därmed har vi visat att polynom p_{n+1} och q_{n+1} finns under antagandet att p_n och q_n finns.

Enligt induktionsprincipen finns det för varje $n \in \mathbf{Z}_+$ polynom $p_n(x)$ och $q_n(x)$ sådana att

$$\cos(n\theta) = p_n(\cos\theta) \quad \text{och} \quad \sin(n\theta) = q_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

---

5. Skissa grafen av funktionen $f(x) = b^x$ där:

(a) $b > 1$;

(b) $b = 1$; och

(c) $0 < b < 1$.

Solution:

6.

Logaritmen av a i basen b definieras enligt formeln

$$\log_b(a) := \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

för $a, b > 0$. Förenkla följande uttryck.

(a) $\log_2(10) + \log_2(24) - \log_2(30)$

(b) $\log_{a^2}(a^5)$ där $a > 0$

(c) $2^{\log_4(9)}$

Solution:

(a) $\log_2(10) + \log_2(24) - \log_2(30) = \log_2\left(\frac{10\times 24}{30}\right) = \log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$

(b) $\log_{a^2}(a^5) = \frac{\ln a^5}{\ln a^2} = \frac{5\ln a}{2\ln a} = \frac{5}{2}$

(c) $2^{\log_4(9)} = 2^{\frac{\ln 9}{\ln 4}} = e^{\frac{\ln 9}{\ln 4}\times\ln 2} = e^{\frac{\ln 9}{2\ln 2}\times\ln 2} = e^{\frac{2\ln 3}{2}} = 3$

7.

Bevisa att

$$\cos\theta + \sin\theta \geq 1$$

för alla $\theta \in [0, \pi/2]$.

Solution:

Vi ger ett motsägelsebevis: Vi antar att det finns ett $\theta \in [0, \pi/2]$ sådant att

$$\cos\theta + \sin\theta < 1.$$

För detta θ vet vi att $\cos\theta \geq 0$ och $\sin\theta \geq 0$ så vi kan räkna att

$$1 > (\cos\theta + \sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trigonometriska ettan}}}{=} 1 + 2\cos\theta\sin\theta$$

och därmed är $\cos\theta\sin\theta < 0$ – ett motsägelse till faktumet att $\cos\theta \geq 0$ och $\sin\theta \geq 0$. Därför måste antagandet vara falskt och

$$\cos\theta + \sin\theta \geq 1$$

för alla $\theta \in [0, \pi/2]$.