TATB04/TEN3 **Tenta, 2024-03-18**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Förenkla summan $\displaystyle\sum_{k=-5}^{40} 5\left(\frac{2}{7}\right)^k$ så långt det går. Eventuella potenser högre än fyra kan stå kvar i ditt svar.

(b) Räkna ut $\displaystyle\sum_{k=1}^{52} \frac{2k+1}{27}$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-5}^{40} 5\left(\frac{2}{7}\right)^k &= \sum_{k=1}^{5} 5\left(\frac{2}{7}\right)^{-k} + 5 + \sum_{k=1}^{40} 5\left(\frac{2}{7}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{5} \frac{35}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^{k-1} + 5 + \sum_{k=1}^{40} \frac{10}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^{k-1} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sats 1.14}}}{=} \frac{35}{2}\frac{\left(1-\left(\frac{7}{2}\right)^5\right)}{\left(1-\left(\frac{7}{2}\right)\right)} + 5 + \frac{10}{7}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^{40}\right)}{\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)\right)} \\
&= \frac{35}{5}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^5 - 1\right) + 5 + \frac{10}{5}\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^{40}\right) \\
&= \frac{35}{5}\left(\frac{7}{2}\right)^5 - \frac{10}{5}\left(\frac{2}{7}\right)^{40} \\
&= 2\left(\frac{7}{2}\right)^6 - 2\left(\frac{2}{7}\right)^{40}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{52} \frac{2k+1}{27} &= \frac{2}{27}\sum_{k=1}^{52} k + \sum_{k=1}^{52} \frac{1}{27} \\
&= \frac{2}{27}\sum_{k=1}^{52} k + \frac{1\times 52}{27} \\
&= \frac{2}{27}\frac{52(52+1)}{2} + \frac{1\times 52}{27} \\
&= 52\left(\frac{53}{27} + \frac{1}{27}\right) = 52 \times \frac{54}{27} = 52 \times 2 = 104.
\end{aligned}$$

2.

Ge ett induktionsbevis av likheten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Solution: Först kontrollerar vi likheten i basfallet (när $n = 1$):

$$\begin{aligned} \text{vänsterledet är} \quad & \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}; \quad \text{och} \\ \text{högerledet är} \quad & \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Därför ser vi att likheten stämmer i basfallet $n = 1$.

Nu antar vi att påståendet är sant för något positivt heltal m:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}. \tag{1}$$

Målet är nu att visa påståendet gäller för $n = m + 1$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m+1}{m+2}.$$

Det kan vi nå med hjälpa av antagandet. Vi börjar med vänsterledet av det vi vill visa och räknar att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{=} \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\ &= \frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} \\ &= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2}. \end{aligned}$$

Därmed gäller påståendet för $n = m + 1$.

Genom induktionprincipen har vi bevisat att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

3.

(a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$.

(b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{6n-1}{4n} = \frac{3}{2}.$$

Solution:

(a) Se Definition 2.20 eller (2.10) och (2.11) i boken.

(b) Först visar vi att $\frac{6n-2}{4n} \leq \frac{3}{2}$ för alla positiva heltal n:

$$\frac{6n-1}{4n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4n} \leq \frac{3}{2}$$

för alla $n > 0$. Därför är $3/2$ en övre begränsning av $((6n-1)/(4n))_{n\in\mathbf{Z}_+}$ För att visa $3/2$ är den minsta övre begränsning betraktar vi ett $\varepsilon > 0$ och letar efter en n sådant att

$$\frac{6n-1}{4n} > \frac{3}{2} - \varepsilon.$$

Om vi hittat för varje $\varepsilon > 0$ ett sådant n kan ett tal mindre än $3/2$ inte vara en övre begränsning till följden. Vi räknar att

$$\begin{aligned}\frac{6n-1}{4n} > \frac{3}{2} - \varepsilon &\iff \frac{3}{2} - \frac{1}{4n} > \frac{3}{2} - \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{4n} < \varepsilon \\ &\iff n > \frac{1}{4\varepsilon}.\end{aligned}$$

Därför för n tillräckligt stort (det vill säga för n sådant att $n > 1/(4\varepsilon)$) är

$$\frac{6n-1}{4n} > \frac{3}{2} - \varepsilon.$$

Så inget tal mindre än $3/2$ är en övre begränsning och $3/2$ är därmed den minsta övre beränsningen av $((6n-1)/(4n))_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

---

4. Finn alla lösningar x till

$$2 + \log\left(\sqrt{1+x}\right) + 3\log\left(\sqrt{1-x}\right) = \log\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

Solution: För att alla termer ska vara väldefinierade måste $-1 < x < 1$. I så fall kan vi skriva om likheten till

$$\begin{aligned}&2 + \log\left(\frac{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}{(1-x^2)^{1/2}}\right) = 0 \\ \iff\ &2 + \log\left(\frac{(1+x)^{1/2}(1-x)^{1/2}(1-x)}{(1-x^2)^{1/2}}\right) = 0 \\ \iff\ &2 + \log(1-x) = 0 \\ \iff\ &\log(1-x) = -2 \\ \iff\ &1 - x = e^{-2} \\ \iff\ &x = 1 - e^{-2}.\end{aligned}$$

Eftersom $-1 < 1 - e^{-2} < 1$ finns det precis en lösning $x = 1 - e^{-2}$.

Uppgiften var tvetydigt angående logaritms bas. Om basen är $b > 1$ ger samma beräkningar att svaret är $x = 1 - b^{-2}$. Om $0 < b < 1$ är $1 - b^{-2} < 0$, så det inte finns någon lösning alls. Inga poäng dras på grund av ett alternativt val av bas.

5.

(a) Visa att

$$\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{\sin(3\theta)}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Åtminestone för vinklar θ sådant att $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbf{Z}$, är en omskrivning av en dubbelvinkel formel

$$\cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2\sin(\theta)}.$$

Använd den för att bevisa

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}.$$

Solution:

(a) Med hjälp av additionsformler och den trigonometriska ettan kan vi räkna att

$$\begin{aligned}
\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) &= \sin\theta \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\right) \\
&= \sin\theta \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos^2\theta - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta\right) \\
&= \sin\theta \left(\frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) \\
&= \sin\theta \left(\frac{3}{4}\left(1 - \sin^2\theta\right) - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\sin\theta\left(3 - 4\sin^2\theta\right)}{4}
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= \sin(\theta + 2\theta) \\
&= \sin\theta\cos(2\theta) + \cos\theta\sin(2\theta) \\
&= \sin\theta\cos(\theta + \theta) + \cos\theta\sin(\theta + \theta) \\
&= \sin\theta\left(\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta\right) + \cos\theta\left(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta\right) \\
&= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \\
&= \sin\theta\left(3 - 4\sin\theta\right).
\end{aligned}$$

Därför är

$$\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{\sin(3\theta)}{4}.$$

(b) Vi använder oss av likheten i fallet $\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}$ respektive $\frac{4\pi}{9}$ för att få

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} \quad \text{och}$$
$$\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)}.$$

Så om vi multiplicerar ihop de får vi att

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}\frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)},$$

men eftersom $\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right) = \sin\left(\pi - \frac{8\pi}{9}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ är

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}.$$

---

6. Utifrån det du vet om den naturliga exponentialfunktionen visa att funktionen $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som är definierad som

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad (\text{for alla } x \in \mathbf{R})$$

är bijektiv. Ge den inversa funktionen.

Solution: För att visa sinh är bijektiv vill vi för varje $y \in \mathbf{R}$ visa att

$$\sinh x = y$$

har en entydig lösning x. Vi räknar att

$$\begin{aligned}
\sinh x = y \iff \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = y &\iff \exp(x) - \exp(-x) - 2y = 0 \\
&\iff \exp(x)^2 - 2y\exp(x) - 1 = 0 \\
&\iff (\exp(x) - y)^2 - 1 - y^2 = 0 \\
&\iff (\exp(x) - y)^2 = 1 + y^2 \\
&\iff \exp(x) - y = \pm\sqrt{1+y^2} \\
&\iff \exp(x) = y \pm \sqrt{1+y^2}
\end{aligned}$$

Därför är $\sinh x = y$ ekvivalent med att $\exp(x) = y + \sqrt{1+y^2}$ eller $\exp(x) = y - \sqrt{1+y^2}$.

Eftersom $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y|$ är

$$y - \sqrt{1+y^2} < y - |y| \le 0 \quad \text{och} \quad y + \sqrt{1+y^2} > y + |y| \ge 0$$

för varje $y \in \mathbf{R}$. Detta (tillsammans med att $\exp\colon \mathbf{R} \to [0,\infty)$ är bijektiv) innebär att det inte finns något x sådant att $\exp(x) = y - \sqrt{1+y^2}$ men $\exp(x) = y + \sqrt{1+y^2}$ är ekvivalent med $x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$. Därför är

$$\sinh x = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

för varje $y \in \mathbf{R}$ och sinh är bijektiv. Från våra beräkningar ser vi att

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

för $x \in \mathbf{R}$.

---

7. Finn alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $z^2 + (2-2i)z + (5-14i) = 0$.

Solution: Först kvadratkompletterar vi $z^2+(2-2i)z+(5-14i) = (z-(1-i))^2+5-12i$ och därför sätter vi $w = z + (1-i)$ och vill hitta alla lösningar till

$$w^2 = -5 + 12i$$

Eftersom vi letar efter komplexa lösningar sätter vi $w = u + iv$ där $u, v \in \mathbf{R}$. Ekvationen är då ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = -5; \\ 2uv = 12. \end{cases}$$

Genom att ta absolutbellopet av ekvationen får vi att

$$u^2 + v^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Därför är

$$2u^2 = (u^2+v^2) + (u^2-v^2) = 13 - 5 = 8$$

och

$$2v^2 = (u^2+v^2) - (u^2-v^2) = 13 + 5 = 18$$

så

$$\begin{cases} u = \pm 2 \quad \text{och} \\ u = \pm 3 \end{cases}$$

Ekvationen $2uv = 12$ säger att u och v har samma tecken så $w = \pm(2+3i)$ är de enda kandidatlösningarna. Vid insättning i systemet ser vi att de verkligen är lösningar.

Sedan vet vi att $z = w-(1-i)$, så lösningarna z är $z = -3-2i$ och $z = 1+4i$.
