TATB04/TEN1 **Dugga 1, 2021-11-25**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Betrakta polynomet $p(x) = 28x - 4x^2 - 53$. Visa med hjälp av kvadratkomplettering att $p(x) \leq -4$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(b) Beräkna $\binom{31}{28}$.

(c) Skriv $\frac{x^4-x^3+4x^2+3}{x^2+3}$ på en form där man tydligt kan avläsa divisions kvot och rest.

Solution:

(a) Vi beräknar att

$$p(x) = 28x - 4x^2 - 53 = -4\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - 4.$$

Första termen är högst 0, och därför är $p(x) \leq 0 - 4 = -4$.

(b) Vi beräknar att

$$\binom{31}{28} = \frac{31!}{28!(31-28)!} = \frac{31!}{28!3!} = \frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{3!} = 31 \cdot 5 \cdot 29 = 155 \cdot 29 = 4495.$$

(c) Vi utför polynom division:

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 - x^3 + 4x^2 + 3}{x^2+3} &= \frac{x^2(x^2+3) - 3x^2 - x^3 + 4x^2 + 3}{x^2+3} \\
&= x^2 + \frac{-x(x^2+3) + 3x + x^2 + 3}{x^2+3} \\
&= x^2 - x + \frac{(x^2+3) + 3x}{x^2+3} \\
&= x^2 - x + 1 + \frac{3x}{x^2+3}
\end{aligned}$$

så kvoten är $k(x) = x^2 - x + 1$ och rest är $r(x) = 3x$.

2.

Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^{26} \left(\frac{4 + 5k^2}{3k} + \frac{3k - 8}{6k} \right).$$

Solution:

Vi beräknar

$$\sum_{k=1}^{26}\left(\frac{4+5k^2}{3k}+\frac{3k-8}{6k}\right)=\sum_{k=1}^{26}\left(\frac{8+10k^2}{6k}+\frac{3k-8}{6k}\right)=\sum_{k=1}^{26}\frac{8+10k^2+3k-8}{6k}$$
$$=\sum_{k=1}^{26}\left(\frac{5}{3}k+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{26}k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{26}1$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sats 1.13 (eller (A-2)) \& (A-3)}}}{=}\frac{5}{3}\cdot\frac{26(26+1)}{2}+\frac{26}{2}=598.$$

3.

Avgör med bevis vad den storsta undre begränsningen av följden $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ är där $a_n=\frac{2n+1}{5n}$ för alla $n\in\mathbf{Z}_+$.

Solution:

Vi gissar att $\inf_n a_n = 2/5$.

För att bevisa det visar vi först att $2/5$ är en undre begränsning:

$$\frac{2}{5}=\frac{2n}{5n}\leq\frac{2n+1}{5n}=a_n$$

för alla $n\in\mathbf{Z}_+$ så $2/5$ är en undre begränsning av $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

Sen visar vi att varje tal i formen $2/5+\varepsilon$ för $\varepsilon>0$ inte är en undre begränsning: Betrakta $\varepsilon>0$. Vi vill hitta $n\in\mathbf{Z}_+$ sådant att

$$a_n<\frac{2}{5}+\varepsilon.$$

Men

$$a_n<\frac{2}{5}+\varepsilon\iff\frac{2n+1}{5n}<\frac{2}{5}+\varepsilon\iff\frac{2}{5}+\frac{1}{5n}<\frac{2}{5}+\varepsilon\iff n>\frac{1}{5\varepsilon}.$$

Enligt den arkimediska egenskapen får vi välja ett heltal $n>1/(5\varepsilon)$ och därför finns det (minst ett) $n\in\mathbf{Z}_+$ sådant att $a_n<2/5+\varepsilon$. Därför är $2/5$ den största undre begränsningen av $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

4.

Kom ihåg att

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

för hela tal n och k där $0\leq k\leq n$. Visa att

$$\sum_{n=2}^{m}\binom{n}{2}=\binom{m+1}{3}$$

för varje heltal $m\geq 2$.

Solution:

Vi ger en induktionsbevis. Först kontrollerar vi basfallet $m = 2$. Vi har att

$$\sum_{n=2}^{2} \binom{n}{2} = \binom{2}{2} = 1$$

och

$$\binom{2+1}{3} = 1,$$

så likheten gäller i fallet $m = 2$. För induktionssteget antar vi att

$$\sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} = \binom{m+1}{3}.$$

för något heltal $m \geq 2$ och räkna med hjälp av detta att

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \binom{n}{2} &= \sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} + \binom{m+1}{2} = \binom{m+1}{3} + \binom{m+1}{2} \\
&= \frac{(m+1)m(m-1)}{6} + \frac{(m+1)m}{2} = (m+1)m\left(\frac{(m-1)}{6} + \frac{1}{2}\right) \\
&= (m+1)m\left(\frac{(m-1)+3}{6}\right) = \frac{(m+2)(m+1)m}{3!} \\
&= \binom{m+2}{3},
\end{aligned}$$

så enligt induktionsantagande gäller

$$\sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} = \binom{m+1}{3}$$

för alla heltal $m \geq 2$.

5.

Betrakta polynomen

$$p(x) = x^{48} - 4^8 x^{40} + x^7 - 2^6 x^4 + x + 2$$

och

$$q(x) = x(x-4).$$

Beräkna resten $r(x)$ av $p(x)$ delat med $q(x)$.

Solution:

Enligt polynomdivisionsatsen vet vi att

$$p(x) = q(x)k(x) + r(x)$$

där k och r är polynom och $r(x) = ax + b$ för konstanter $a, b \in \mathbf{R}$. Dessutom är $q(0) = q(4) = 0$ så

$$\begin{aligned}
2 = p(0) = q(0)k(0) + r(0) = b \quad &\text{och} \\
6 = p(4) = q(4)k(4) + r(4) = 4a + b &
\end{aligned}$$

så $b = 2$ och därmed är $a = 1$. Därför är $r(x) = x + 2$.