TATB04/TEN1 **Dugga 1, 2022-11-25**

Inledande matematisk analys

1.

Kom ihåg från vår första föreläsning att vi undrade för vilka par av heltal, a och b, är

$$a + b = ab. \tag{$\bigstar$}$$

Vi beräknade att

$$a + b = ab \iff (a-1)(b-1) = 1.$$

Använd sista likheten för att finna alla par av heltal som uppfyller ($\bigstar$). Motivera ditt svar och visa hur du använder dig av kravet att a och b ska vara heltal.

Solution:

Eftersom a och b är heltal så är $a-1$ och $b-1$. Därför behöver vi hitta alla produkter av heltal som ger 1. Eftersom produkten är positivt måste båda faktorerna har samma tecken.

Om vi tänker först vad kan händer om båda faktorerna är positiva. Om, till exempel, $0 < b-1 < 1$ måste $a-1 > 1$ så att produkten kan vara 1 och vise versa. Men det finns ingen *heltal* strängt emellan 0 och 1, så det måste vara att $1 = a-1 = b-1$, så $a = b = 2$ är den enda lösningen i det här fallet.

En liknande analys i fallet faktorerna är negativa visa att $-1 = a-1 = b-1$ är den enda möjligheten då. Så det finns en andra lösning: $a = b = 0$. De två lösningar är alla lösningarna som finns.

---

2. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

för varje positivt heltal n.

Solution: Vi visar

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{1}$$

med hjälpa av en induktionsbevis.

Först kontrollerar vi att (1) gäller för $n = 1$: I så fall är

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{1} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

och

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

så basfallet är sant.

Sedan antar vi att (1) gäller för $n = m$ för något $m \in \mathbf{Z}_+$ och betrakta fallet $n = m + 1$: Vi beräknar att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} + \frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(m+3)-2}{(m+1)(m+2)(m+3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(m+2)(m+3)}\end{aligned}$$

och därmed är (1) med $n = m + 1$ bevisat under antagandet (1) med $n = m$ är sant.

Enligt induktionsprincipen är (1) bevisat för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

---

3. Betrakta följderna $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ som ges av formlerna

$$a_n = \frac{n+6}{6n} \quad \text{och} \quad b_n = \frac{2n-3}{3n}.$$

(a) Ange $\sup_n a_n$ och $\sup_n b_n$. Du måste inte motivera dina svar.

(b) Ge ett fullständigt bevis för ett av dina svar från (a).

Solution:

(a) $\sup_n a_n = 7/6$ och $\sup_n b_n = 2/3$.

(b) Vi ger bevis för båda suprema, med endast en krävs för full poäng.

För följden $(a_n)n$ beräknar vi att

$$a_n = \frac{n+6}{6n} \leq \frac{7}{6} \impliedby 6(n+6) \leq 42n \impliedby (n+6) \leq 7n \impliedby 6 \leq 6n \impliedby n \geq 1,$$

så vi har att $a_n \leq 7/6$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$. För att visa det inte finns en mindre övre begränsning, noterar vi att $a_1 = 7/6$, så inget tal mindre än $7/6$ kan vara en övrebegräsning. Därmed har vi bevisat att $\sup_n a_n = 7/6$.

För följden $(b_n)n$ beräknar vi att

$$b_n = \frac{2n-3}{3n} \leq \frac{2}{3} \impliedby 2n - 3 \leq 2n \impliedby -3 \leq 0,$$

så $2/3$ är en över begränsning till $(b_n)_n$. För att visa det också är den minsta övre begränsningen, betrakta vi ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ och försöker finna ett $n \in \mathbf{Z}_+$ sådant att $2/3 - \varepsilon < b_n$: Vi beräknar att

$$\frac{2}{3} - \varepsilon < b_n = \frac{2n-3}{3n} \impliedby \frac{2}{3} - \frac{2n-3}{3n} < \varepsilon \impliedby \frac{1}{n} < \varepsilon \impliedby n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Därför kan vi för varje $\varepsilon > 0$ (enligt den arkimediska egenskapen) välja ett $n > 1/\varepsilon$ sådant att $2/3 - \varepsilon < b_n$. Därmed har vi bevisat att $\sup_n b_n = 2/3$.

---

4. Betrakta polynomen

$$p(x) = 2x^4 + 11x^3 + 20x^2 + 34x + 3 \quad \text{och}$$
$$q(x) = x^2 + 4x + 1.$$

(a) Finn polynom $k(x)$ och $r(x)$ sådana att

$$p(x) = q(x)k(x) + r(x)$$

och $\deg(r) < 2$.

(b) Är $p(x)$ delbart med $(x + 2)$ eller inte?

Solution:

(a) Man får använda sig av till exempel liggande stolen och får svaret att

$$k(x) = 2x^2 + 3x + 6 \quad \text{och} \quad r(x) = 7x - 3.$$

(b) Enligt sats 3.12 är $p(x)$ delbart med $(x+2)$ om och endast om $p(-2) = 0$. Vi beräknar att $p(-2) = 32 - 88 + 80 - 68 + 3 = -41 \neq 0$, så $p(x)$ inte är delbart med $(x + 2)$.

---

5. Beräkna

$$\sum_{k=-5}^{24} \frac{2k^2 + k}{7k}.$$

Solution: Här måste jag erkänna att jag missade att uttrycket är odefinierad för $k = 0$ – tanken var att $\frac{2k^2+k}{7k}$ skulle kunna förenklas till $\frac{2k+1}{7}$. Eftersom jag missade det själv och det inte var meningen att lura studenter fick man fullpoäng även om man räknade utifrån att $\frac{2k^2+k}{7k} = \frac{2k+1}{7}$ för alla k (eller en ekvivalent beräkning). Egentligen är det förstås fel och termen där $k = 0$ i summan odefinierad. Man fick också full poäng om man noterade det och inte gjorde mer.

Efter den slarviga förenkling kan man beräkna att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-5}^{24} \frac{2k+1}{7} &= \sum_{j=1}^{30} \frac{2(j-6)+1}{7} \\
&= \frac{2}{7}\sum_{j=1}^{30} j - \frac{11}{7}\sum_{j=1}^{30} 1 \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sats 1.13 \& anmärkning 1.15 (a)}}}{=} \frac{2 \times 30 \times 31}{7 \times 2} - \frac{11 \times 30}{7} = \frac{600}{7}.
\end{aligned}$$