TATB04/TEN1 **Dugga 1, 2023-01-03**

Inledande matematisk analys

1.

Betrakta ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{$\lightning$}$$

där a, b och c är givna *udda heltal*.

(a) Utred när en produkt av tre heltal är udda respektive jämn. Mer exakt sagt, vilken kombination eller vilka kombinationer av udda och jämn måste faktorerna vara så att produkten är udda respektive jämn?

(b) Ge ett motsägelsebevis av påståendet att ($\lightning$) inte kan har någon rationell lösning x.

Solution:

(a) Betrakta produkten ABC av tre heltal A, B och C. Om minst en faktor är jämnt – till exempel om $A = 2k$ för något $k \in /Z$ – är produkten ABC jämnt, eftersom produkten kan sedan skrivas som $ABC = 2kBC$. Däremot om alla heltal är udda kan vi skriva $A = 2k + 1$, $B = 2\ell + 1$ och $C = 2m + 1$ för $k, \ell, m \in \mathbf{Z}$ är

$$ABC = (2k+1)(2\ell+1)(2m+1) = 8k\ell m+4\ell m+4km+4k\ell+2k+2\ell+2m+1$$

som är udda.

Sammanfattningsvis är en produkt av tre heltal udda om och endast om alla tre faktorerna är udda.

(b) Vi antar att det finns en rationell lösning x till ($\lightning$) och därför kan skriva $x = p/q$ där $p, q \in Z$ inte har någon gemensam nämnare.

Vi beräknar att

$$\begin{aligned} 0 = ax^2 + bx + c &= a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c \\ \iff 0 &= ap^2 + bpq + cq^2 \end{aligned}$$

Eftersom 0 är jämnt måste även $ap^2 + bpq + cq^2$ vara jämnt. Men eftersom p och q har inga gemensam nämnare kan de inte båda vara jämna, så vi har två fall:

- Om både p och q är udda är $ap^2 + bpq + cq^2$ summan av tre udda tal, och därmed är udda;
- Om exakt en av p och q udda är $ap^2 + bpq + cq^2$ summan av ett udda tal och två jämna tal, och därmed är udda.

Detta är ett motsägelse eftersom $ap^2 + bpq + cq^2$ kan inte vara både jämnt och udda. Därför finns det inga rationella lösning till ($\lightning$).

---

2. Visa att

$$2^{2n} - 1$$

är jämnt delbart med 3 för varje positivt heltal n.

Solution: Vi visar

$$P(n) = \text{"}2^{2n} - 1 \text{ är jämnt delbart med 3"}$$

med hjälpa av ett induktionsbevis.

Först kontrollerar vi att $P(1)$ är sant: I så fall är

$$2^{2n} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

som är jämnt delbart med 3, så $P(1)$ är sant.

Sedan antar vi att $P(m)$ är sant för något $m \in \mathbf{Z}_+$, och därmed kan skriva $2^{2m} - 1 = 3\ell$ för något $\ell \in \mathbf{Z}$. Vi betrakta $P(m+1)$ och beräknar att

$$2^{2(m+1)} - 1 = 4 \times 2^{2m} - 1 = 3 \times 2^{2m} + 2^{2m} - 1 = 3 \times 2^{2m} + 3\ell$$

enligt $P(m)$. Vi har därmed bevisat att $P(m) \implies P(m+1)$ för godtyckliga $m \in \mathbf{Z}$.

Enligt induktionsprincipen är $P(n)$ bevisat för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

---

3. Betrakta följderna $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ som ges av formlerna

$$a_n = \frac{n+9}{5n} \quad \text{och} \quad b_n = \frac{3n-7}{4n}.$$

(a) Ange $\sup_n a_n$ och $\sup_n b_n$. Du måste inte motivera dina svar.

(b) Ge ett fullständigt bevis för ett av dina svar från (a).

Solution:

(a) $\sup_n a_n = 2$ och $\sup_n b_n = 3/4$.

(b) Vi ger bevis för båda suprema, med endast en krävs för full poäng.

För följden $(a_n)n$ beräknar vi att

$$a_n = \frac{n+9}{5n} \leq 2 \iff n + 9 \leq 10n \iff 9 \leq 9n \iff n \geq 1,$$

så vi har att $a_n \leq 2$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$. För att visa det inte finns en mindre övre begränsning, noterar vi att $a_1 = 2$, så inget tal mindre än 2 kan vara en övrebegräsning. Därmed har vi bevisat att $\sup_n a_n = 2$.

För följden $(b_n)n$ beräknar vi att

$$b_n = \frac{3n-7}{4n} \leq \frac{3}{4} \iff 4(3n-7) \leq 4(3n) \iff -28 \leq 0.$$

Eftersom $-28 \leq 0$ är $3/4$ är en över begränsning till $(b_n)_n$. För att visa det också är den minsta övre begränsningen, betrakta vi ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ och försöker finna ett $n \in \mathbf{Z}_+$ sådant att $3/4 - \varepsilon < b_n$: Vi beräknar att

$$\frac{3}{4} - \varepsilon < b_n = \frac{3n-7}{4n} \iff \frac{3}{4} - \frac{3n-7}{4n} < \varepsilon \iff \frac{7}{4n} < \varepsilon \iff n > \frac{7}{4\varepsilon}.$$

Därför om vi för varje $\varepsilon > 0$ (enligt den arkimediska egenskapen) välja ett $n > 7/4\varepsilon$ är $2/3 - \varepsilon < b_n$. Därmed har vi bevisat att $\sup_n b_n = 3/4$.

4. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$$

(a) Visa att det inte kan finnas något x sådant att $f(x) = 3$

(b) Visa att till varje $y \neq 3$ det finns (minst) ett $x \neq 2$ sådant att $f(x) = y$

Solution:

(a) Vi antar att det finns ett x sådant att $f(x) = 3$. Då är

$$\begin{aligned} y = f(x) \implies 3 = \frac{3x+4}{x-2} &\implies 3(x-2) = 3x+4 \\ \implies 3x - 6 = 3x + 4 &\implies -6 = 4. \end{aligned}$$

Eftersom $-6 \neq 4$ kan det inte heller finnas ett x som löser $f(x) = 3$.

(b) För $y \neq 3$ kan vi räkna att

$$y = f(x) \impliedby y = \frac{3x+4}{x-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{om } x \neq 2}}{\impliedby} y(x-2) = 3x+4 \impliedby xy - 3x = 2y + 4 \impliedby x = \frac{2y+4}{y-3},$$

så länge $x \neq 2$. Men genom att skriva om

$$x = \frac{2y+4}{y-3} = x = 2 + \frac{10}{y-3}$$

ser vi att x inte är lika med 2 för något $y \neq 3$.

5.

(a) Ge ett bevis av formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

där $n \in \mathbf{Z}_+$.

(b) Beräkna

$$\sum_{k=-15}^{32} \frac{3k+5}{2}.$$

Solution:

(a) Se exempel 1.12 eller sats 2.7 i boken.

(b) Vi beräknar att

$$\begin{aligned} \sum_{k=-15}^{32} \frac{3k+5}{2} &= \frac{3}{2} \sum_{k=-15}^{32} k + \frac{5}{2} \sum_{k=-15}^{32} 1 = \frac{3}{2}\left(-\sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{32} k\right) + \frac{5}{2} \times 48 \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{formeln i (a)}}}{=} \frac{3}{2}\left(-\frac{15 \times 16}{2} + \frac{32 \times 33}{2}\right) + \frac{5}{2} \times 48 \\ &= \frac{3}{2}(-120 + 528) + 120 = \frac{3}{2}408 + 120 = 612 + 120 = 732. \end{aligned}$$