TATB04/TEN1 **Dugga 1, 2023-11-27**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Förenkla summan $\displaystyle\sum_{k=-5}^{40} 3\left(\frac{2}{7}\right)^k$ så långt det går. Eventuella potenser högre än fyra kan stå kvar i ditt svar.

(b) Räkna ut $\displaystyle\sum_{k=1}^{52} \frac{2k+3}{8}$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-5}^{40} 3\left(\frac{2}{7}\right)^k &= \sum_{k=1}^{5} 3\left(\frac{2}{7}\right)^{-k} + 3 + \sum_{k=1}^{40} 3\left(\frac{2}{7}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{5} \frac{21}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^{k-1} + 3 + \sum_{k=1}^{40} \frac{6}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^{k-1} \\
&\underset{\text{sats 1.14}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{21}{2}\frac{\left(1-\left(\frac{7}{2}\right)^5\right)}{\left(1-\left(\frac{7}{2}\right)\right)} + 3 + \frac{6}{7}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^{40}\right)}{\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)\right)} \\
&= \frac{21}{5}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^5 - 1\right) + 3 + \frac{6}{5}\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^{40}\right) \\
&= \frac{21}{5}\left(\frac{7}{2}\right)^5 - \frac{6}{5}\left(\frac{2}{7}\right)^{40} \\
&= \frac{6}{5}\left(\frac{7}{2}\right)^6 - \frac{6}{5}\left(\frac{2}{7}\right)^{40}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{52} \frac{2k+3}{8} &= \frac{2}{8}\sum_{k=1}^{52} k + \sum_{k=1}^{52} \frac{3}{8} \\
&= \frac{2}{8}\sum_{k=1}^{52} k + \frac{3\times 52}{8} \\
&= \frac{2}{8}\frac{52(52+1)}{2} + \frac{3\times 52}{8} \\
&= 52\left(\frac{53}{8}+\frac{3}{8}\right) = 52\times\frac{56}{8} = 7\times 52 = 364.
\end{aligned}$$

2.

Betrakta påståendet

$$"n^2 \geq 4n - 3"$$

för $n \in \mathbf{Z}_+$.

(a) Ge ett induktionsbevis av påståendet för alla $n \geq 3$.

(b) Vilken del av ditt bevis inte fungerar om du istället försöker ge ett induktionsbevis av påståendet för alla $n \geq 1$?

Solution:

(a) Vi betraktar basfallet $n = 3$. Då är $n^2 = 3^2 = 9$ och $4n - 3 = 4 \times 3 - 3 = 9$ så $n^2 \geq 4n - 3$ när $n = 3$.

Nu antar vi att $n^2 \geq 4n - 3$ för något $n \geq 3$ och beräknar att

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq (4n - 3) + 2n + 1 = (4(n+1) - 3) + (2n - 3).$$

Om $n \geq 3$ är $2n - 3 \geq 0$ så vi drar slutsatsen att

$$n^2 \geq 4n - 3 \implies (n+1)^2 \geq 4(n+1) - 3$$

för $n \geq 3$.

Enligt induktionsaxiomet är $n^2 \geq 4n - 3$ för alla $n \geq 3$.

(b) Bassteget fungerar bra: Om $n = 1$ är $n^2 = 1$ och $4n - 3 = 3$ så $n^2 = 1 \geq 3 = 4n - 3$. Däremot fungerar induktionssteget inte lika bra eftersom $2n - 3 \ngeq 0$ för $n = 1$, så man inte kan går från påståendet med $n = 1$ till påståendet med $n = 2$.

(Om man skulle betrakta fallet $n = 1$ separat och börjar ett induktionsbevis från och med $n = 2$, faller basfallet $n = 2$ bort trots att induktionssteget fungerar från och med $n = 2$. Det är endast från och med $n = 3$ att både basfallet och induktionssteget fungerar.)

---

3. Betrakta uttrycket

$$f(x) = \frac{x^2 + 12}{x}.$$

(a) Visa att det inte finns något positivt x så att $f(x) < 4\sqrt{3}$.

(b) Finns det ett x så att $f(x) = 4\sqrt{3}$?

Solution:

(a) Vi antar att det finns ett positivt x så att $f(x) < 4\sqrt{3}$. Då kan vi räkna att

$$f(x) < 4\sqrt{3} \implies \frac{x^2 + 12}{x} < 4\sqrt{3} \implies x^2 + 12 < 4\sqrt{3}x \implies (x - 2\sqrt{3})^2 < 0.$$

Det är ett motsägelse och därför kan det inte finnas ett positivt x så att $f(x) < 4\sqrt{3}$.

(b) Om vi testar $x = 2\sqrt{3}$ ser vi att

$$f(x) = f(2\sqrt{3}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 12}{2\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3},$$

så det finns ett x så att $f(x) = 4\sqrt{3}$.

4.

(a) Definiera vad det betyder att säga en mängd A har en supremum α.

(b) Visa att om mängden A är följden

$$\left(\frac{4n-6}{7n}\right)_{n \in \mathbf{Z}_+}$$

då har A en supremum $\alpha = 4/7$.

Solution:

(a) En mängd A har en supremum α om

- $a \leq \alpha$ för alla $a \in A$, och
- det finns för varje $\varepsilon > 0$ (minst) ett $a \in A$ så att $\alpha - \varepsilon < a$

(b) Först räknar vi att

$$\frac{4n-6}{7n} = \frac{4}{7} - \frac{6}{7n} \leq \frac{4}{7}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, så $\frac{4}{7}$ är en övre begränsning till följden. Och för $\varepsilon > 0$ är

$$\frac{4}{7} - \varepsilon < \frac{4n-6}{7n} \Longleftarrow \frac{4}{7} - \varepsilon < \frac{4}{7} - \frac{6}{7n} \Longleftarrow \varepsilon > \frac{6}{7n} \Longleftarrow n > \frac{6}{7\varepsilon}.$$

Eftersom vi kan välja n (beroende på ε) så att $n > \frac{6}{7\varepsilon}$ vet vi att det finns för varje $\varepsilon > 0$ ett n så att $\frac{4}{7} - \varepsilon < \frac{4n-6}{7n}$. Därför är $\frac{4}{7}$ den minsta övre begränsningen av följden.

---

5. Betrakta funktionerna $f\colon (0,\infty) \to [4\sqrt{3},\infty)$ och $g\colon [4\sqrt{3},\infty) \to (0,\infty)$ som definieras enligt formlerna

$$f(x) = \frac{x^2+12}{x} \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{x + \sqrt{x^2-48}}{2}$$

(så f är funktionen från uppgift 3).

(a) Visa att $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$.

(b) Visa att f *inte* är inverterbar.

Solution:

(a) Vi räknar ut att

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-48}}{2}\right)^2 + 12}{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-48}}{2}\right)} \\
&= \frac{\left(x+\sqrt{x^2-48}\right)^2 + 48}{2\left(x+\sqrt{x^2-48}\right)} \\
&= \frac{\left(x^2 + 2x\sqrt{x^2-48} + x^2 - 48\right) + 48}{2\left(x+\sqrt{x^2-48}\right)} \\
&= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2-48}}{2\left(x+\sqrt{x^2-48}\right)} \\
&= \frac{2x\left(x+\sqrt{x^2-48}\right)}{2\left(x+\sqrt{x^2-48}\right)} = x
\end{aligned}
$$

(b) Vi visar att f *inte* är injektiv. För att göra det visar vi att det finns $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ så att $x_1 \neq x_2$ och $f(x_1) = f(x_2)$. För att hjälpa oss hitta sådana pår skriver vi om

$$
f(x) = \frac{x^2+12}{2x} = \frac{\left(x + \frac{12}{x}\right)}{2}.
$$

Om vi för $x_1 > 0$ väljer $x_2 = 12/x_1$ (som är också positivt) ser vi att

$$
f(x_2) = \frac{\left(x_2 + \frac{12}{x_2}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{12}{x_1} + \frac{12}{\left(\frac{12}{x_1}\right)}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{12}{x_1} + x_1\right)}{2} = f(x_1).
$$

Utöver det är $x_1 \neq x_2$ för $x_1 \neq 2\sqrt{3}$. Vi drar slutsatsen att f inte är injektiv och därmed inte heller inverterbar.