TATB04/TEN1 **Dugga 1, 2024-01-02**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Visa att $\displaystyle\sum_{k=-10}^{40} 6\left(\frac{3}{4}\right)^k = 24\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{10} - \left(\frac{3}{4}\right)^{41}\right)$.

(b) Räkna ut $\displaystyle\sum_{k=1}^{128} \frac{k+3}{64}$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-10}^{40} 6\left(\frac{3}{4}\right)^k &= \sum_{\ell=1}^{51} 6\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-11} \\
&= \sum_{\ell=1}^{51} 6\left(\frac{4}{3}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sats 1.14}}}{=} 6\left(\frac{4}{3}\right)^{10}\frac{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{51}\right)}{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)\right)} \\
&= 24\left(\frac{4}{3}\right)^{10}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{51}\right) \\
&= 24\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{10} - \left(\frac{3}{4}\right)^{41}\right).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{128} \frac{k+3}{64} &= \frac{1}{64}\sum_{k=1}^{128} k + \sum_{k=1}^{128}\frac{3}{64} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{anmärkning 1.15(a)}}}{=} \frac{1}{64}\sum_{k=1}^{128} k + \frac{3\times 128}{64} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sats 1.13}}}{=} \frac{1}{64}\frac{128(128+1)}{2} + 6 \\
&= 135.
\end{aligned}$$

2.

Betrakta påståendet

$$\text{"}2^n \geq n+4\text{"}$$

för $n \in \mathbf{Z}_+$.

(a) Ge ett induktionsbevis av påståendet för alla $n \geq 3$.

(b) Vilken del av ditt bevis inte fungerar om vi istället försöker ge ett induktionsbevis av påståendet för alla $n \geq 1$?

Solution:

(a) Vi betraktar basfallet $n = 3$. Då är $2^n = 2^3 = 8$ och $n + 4 = 3 + 4 = 7$ så $2^n \geq n + 4$ när $n = 3$.

Nu antar vi att $2^n \geq n + 4$ för något $n \geq 3$ och beräknar att

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n + 4) = (n + 1) + 4 + (n + 3).$$

Eftersom $n + 3 \geq 0$ för $n \geq 3$ (och även för $n \geq 1$) drar vi slutsatsen att

$$2^{n+1} \geq (n + 1) + 4 + (n + 3) \geq (n + 1) + 4.$$

för $n \geq 3$.

Enligt induktionsaxiomet är $2^n \geq n + 4$ för alla $n \geq 3$.

(b) Induktionssteget fungerar även för $n \geq 1$ men bassteget inte fungerar: Om $n = 1$ är $2^1 = 2$ och $n + 4 = 5$ så $2^n = 2 \ngeq 5 = n + 4$.

(Påståendet är också falskt för $n = 2$ eftersom $2^2 \ngeq 2 + 4$.)

---

3. Betrakta uttrycket

$$f(x) = \frac{x^2 + 18}{x}.$$

(a) Visa att det inte finns något positivt x så att $f(x) < 6\sqrt{2}$.

(b) Finns det ett x så att $f(x) = 6\sqrt{2}$?

Solution:

(a) Om vi antar att det finns ett positivt x så att $f(x) < 6\sqrt{2}$ kan vi räkna att

$$f(x) < 6\sqrt{2} \implies \frac{x^2 + 18}{x} < 6\sqrt{2} \implies x^2 + 18 < 6\sqrt{2}x \implies (x - 3\sqrt{2})^2 < 0.$$

Det är ett motsägelse eftersom ett reellt tal i kvadrat aldrig är negativt och därför kan det inte finnas ett positivt x så att $f(x) < 6\sqrt{2}$.

(b) Om vi testar $x = 3\sqrt{2}$ ser vi att

$$f(x) = f(3\sqrt{2}) = \frac{(3\sqrt{2})^2 + 18}{3\sqrt{2}} = \frac{36}{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{2},$$

så det finns ett x så att $f(x) = 6\sqrt{2}$.

4.

(a) Definiera vad det betyder att säga en mängd A har en supremum α.

(b) Visa att om mängden A är följden

$$\left(\frac{8n-7}{4n}\right)_{n\in\mathbf{Z}_+}$$

då har A en supremum $\alpha = 2$.

Solution:

(a) En mängd A har en supremum α om

- $a \leq \alpha$ för alla $a \in A$, och
- det för varje $\varepsilon > 0$ finns (minst) ett $a \in A$ så att $\alpha - \varepsilon < a$

(b) Först räknar vi att

$$\frac{8n-7}{4n} = 2 - \frac{7}{4n} \leq 2$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, så 2 är en övre begränsning till följden. Och för $\varepsilon > 0$ är

$$2 - \varepsilon < \frac{8n-7}{4n} \impliedby 2 - \varepsilon < 2 - \frac{7}{4n} \impliedby \varepsilon > \frac{7}{4n} \impliedby n > \frac{7}{4\varepsilon}.$$

Eftersom vi kan välja n (beroende på ε) så att $n > \frac{7}{4\varepsilon}$ vet vi att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett n så att $2 - \varepsilon < \frac{4n-6}{7n}$. Därför är 2 den minsta övre begränsningen av följden.

5.

(a) Visa att

$$(1-r)\sum_{k=1}^{n} kr^k = \sum_{k=1}^{n} r^k - nr^{n+1}$$

för givna tal $n \in \mathbf{Z}_+$ och r.

(b) Använd ditt svar från (a) för att visa

$$\sum_{k=1}^{n} kr^k = r\frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

för $n \in \mathbf{Z}_+$ och $r \neq 1$.

Solution:

(a) Vi räknar att

$$\begin{aligned}
(1-r)\sum_{k=1}^{n} kr^k &= \sum_{k=1}^{n} kr^k - \sum_{k=1}^{n} kr^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kr^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)r^k \\
&= \left(r + \sum_{k=2}^{n} kr^k\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} (k-1)r^k + nr^{n+1}\right) \\
&= r + \sum_{k=2}^{n} kr^k - \sum_{k=2}^{n} (k-1)r^k - nr^{n+1} \\
&= r + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1))r^k - nr^{n+1} \\
&= r + \sum_{k=2}^{n} r^k - nr^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} r^k - nr^{n+1}
\end{aligned}$$

för $n \in \mathbf{Z}_+$ och $r \neq 0, 1$.

(b) Vi kan räkna ut med hjälp av sats 1.14 att

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \sum_{k=1}^{n} rr^{k-1} = r\frac{1-r^n}{1-r},$$

så från (a) får vi att

$$(1-r)\sum_{k=1}^{n} kr^k = \sum_{k=1}^{n} r^k - nr^{n+1} = r\frac{1-r^n}{1-r} - nr^{n+1} = r\frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{1-r}.$$

Därmed är

$$\sum_{k=1}^{n} kr^k = r\frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

för $n \in \mathbf{Z}_+$ och $r \neq 0, 1$.