TATB04/TEN2 **Dugga 2, 2021-01-15**

Inledande matematisk analys

1.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{x-4}{x-3}$$

med definitionsmängd $D = \{x \in \mathbf{R} \colon x \neq 3\}$.

(a) Visa att det inte finns något $x \in D$ sådant att $f(x) = 1$.

(b) För varje reelt tal $y \neq 1$ visa att det finns (minst) ett $x \in D$ sådant att $f(x) = y$.

Solution:

(a) Vi ger ett motsägelsebevis. Vi antar att det finns ett $x \in D$ sådant att $f(x) = 1$:

$$f(x) = 1 \implies \frac{x-4}{x-3} = 1 \implies x - 4 = x - 3 \implies -4 = -3.$$

Eftersom $-4 \neq -3$ har vi räknat oss fram till ett motsägelse och därför kan det inte finnas ett $x \in D$ sådant att $f(x) = 1$.

(b) Vi betraktar ett $y \neq 1$ och räknar att

$$f(x) = y \impliedby \frac{x-4}{x-3} = y \impliedby x-4 = xy-3y \impliedby x(1-y) = 4-3y \impliedby x = \frac{4-3y}{1-y}.$$

så $x = (4-3y)/(1-y)$ är sådant att $f(x) = y$ och utöver det är samma x ett element i D eftersom

$$3 = x = \frac{4-3y}{1-y} \implies 3 - 3y = 4 - 3y \implies 0 = 1.$$

2.

Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen

$$\frac{\cos(2\theta) - 3\sqrt{3}\cos\theta}{2} + 2 = 0.$$

Solution:

Vi räknar att

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\cos(2\theta) - 3\sqrt{3}\cos\theta}{2} + 2 = \cos^2\theta - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2} \\ &= \left(\cos\theta - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} - \frac{27}{16} = \left(\cos\theta - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \frac{3}{16} \end{aligned}$$

som är ekvivalent med

$$\cos\theta = \frac{3\sqrt{3}}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Eftersom $\sqrt{3} > 1$ är $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ det enda möjligheten och därmed är alla lösningar till ekvationen $\theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ för $k \in \mathbf{Z}$.

3.

(a) Kom ihåg att $e^x \geq 1 + x$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Betrakta implikationen

$$e^x \geq 1 + x \implies \ln(e^x) \geq \ln(1 + x) \tag{†}$$

som gäller så länge $x > -1$ (och därmed är $\ln(1 + x)$ definierad). Vilken egenskap hos den naturliga logaritmfunktionen behöver vi för att justifiera[1] implikationen?

(b) Om vi sätter $x = b - 1$ i slutsatsen av (†) ser vi att

$$\ln(b) \leq b - 1 \tag{‡}$$

för $b > 0$. Använd (‡) och räkneregler för den naturliga logaritmfunktionen för att visa

$$\ln(b) \geq \frac{b-1}{b}$$

för $b > 0$. [Tips: byt ut b mot b^{-1}.]

Solution:

(a) Att den naturliga logaritmfunktionen är växande.

(b) Om $b > 0$ är även $b^{-1} > 0$ så vi får byta ut b mot b^{-1} i (‡) för att se

$$\ln(b^{-1}) \leq b^{-1} - 1 \implies -\ln(b) \leq \frac{1-b}{b} \implies \ln(b) \geq \frac{b-1}{b}$$

4.

Betrakta funktionen

$$g(z) = 1/z,$$

som är definierad för alla icke-noll komplexa tal z, och mängden M av lösningar $z \in \mathbf{C}$ till ekvationen

$$|z - 3i| = 2|z|.$$

Mängden M är en cirkel i komplexa planet med medelpunkt $-i$ och radie 2.

Visa att mängden av alla w sådana att $w = g(z)$ och $z \in M$ är en annan cirkel – en cirkel med medelpunkt $-i/3$ och radie $2/3$.

[1] Jag har lärt mig att "justifiera" är inget ord – jag menar "rättfärdiga" eller "motivera".

Solution: För $w = 1/z$ är $w \neq 0$ och därför är

$$|z-3i| = 2|z| \iff |1/w-3i| = 2|1/w| \iff \frac{3|1/(3i) - w|}{|w|} = 2\frac{1}{|w|} \iff \left|\frac{i}{3} + w\right| = \frac{2}{3}.$$

Ekvationen

$$\left|\frac{i}{3} + w\right| = \frac{2}{3}$$

är en cirkel i komplexa planet med medelpunkt $-i/3$ och radie $2/3$.

5.

Visa att

$$\cos(3\theta) = 4\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

genom att visa båda led är lika med $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Solution:

Vi räknar att

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos(2\theta) - \sin\theta\sin(2\theta) \\
&= \cos\theta\cos(\theta + \theta) - \sin\theta\sin(\theta + \theta) \\
&= \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta \\
&= \cos^3\theta - 3(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
&4\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \\
&= 4\cos\theta\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\right) \\
&= 4\cos\theta\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos^2\theta - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta\right) \\
&= 4\cos\theta\left(\frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{3}{4}\sin^2\theta\right) \\
&= 4\cos\theta\left(\frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{3}{4}(1 - \cos^2\theta)\right) \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

så

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right).$$

6.

Lös ekvationen $\pi^{-x} = 4 - 6\pi^{-x}$ för x.

Solution: Vi räknar

$$\pi^{-x} = 4-6\pi^{-x} \iff 1 = 4\pi^x-6 \iff \frac{7}{4} = \pi^x \iff \ln\left(\frac{7}{4}\right) = \ln(\pi^x) \iff x = \frac{\ln\left(\frac{7}{4}\right)}{\ln\pi}.$$

7.

Betrakta funktionerna $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $\cosh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formlerna

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Visa att

$$\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x).$$

Solution:

Vi räknar

$$\begin{aligned} 2\cosh(x)\sinh(x) &= 2\frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{4} \\ &= \frac{(e^{2x} - e^{-2x})}{2} \\ &= \sinh(2x). \end{aligned}$$