TATB04/TEN2 **Dugga 2, 2021-01-14**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Lös ekvationen $\tan(1-x) = \sqrt{3}$ för $x \in \mathbf{R}$.

(b) För vilka $x \in \mathbf{R}$ gäller det att $2\cos^2 x - \sin x = 1$?

Solution:

(a) En lösning till $\tan\theta = \sqrt{3}$ är (från standard vinklar) $\theta = \frac{\pi}{3}$, så vi ser att alla lösningar är $\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$). Därför är

$$\begin{aligned}\tan(1-x) = \sqrt{3} &\iff 1 - x = \frac{\pi}{3} + n\pi \ (n \in \mathbf{Z}) \\ &\iff x = 1 - \frac{\pi}{3} - n\pi \ (n \in \mathbf{Z}).\end{aligned}$$

(b) Med hjälp av den trigonometriska ettan ser vi att

$$1 = 2\cos^2 x - \sin x \iff 1 = 2(1-\sin^2 x) - \sin x \iff 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Om vi tar $t = \sin x$ behöver vi lösa

$$2t^2 + t - 1 = 0 \iff 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = 0 \iff t = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Alltså erhåller vi

$$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in \mathbf{Z})$$

samt

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \ (n \in \mathbf{Z}) & \text{eller} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \ (n \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

Lösningarna kan även sammanfattas enligt $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$ ($n \in \mathbf{Z}$).

2.

(a) Visa att om n^3 är jämnt där n är ett heltal då är n jämnt.

(b) Visa att $2^{\frac{1}{3}}$ är irrationellt.

Solution:

(a) Det räcker att visa kontrapositionen: ”Om n är ett udda heltal då är n^3 udda.”

Om n är ett udda heltal kan det skrivas som $n = 2k + 1$ för något heltal k. Då är

$$n^3 = (2n+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1,$$

så n^3 är udda.

(b) Vi ger ett motsägelsebevis. Anta att $2^{\frac{1}{3}}$ är rationellt. Då kan vi skriva $2^{\frac{1}{3}} = n/m$ där n och m är hela tal som har inga gemensamma faktorer. Det medför att

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^3 \implies m^3 2 = n^3$$

så n^3 är jämnt. Enligt (a) är n därför jämnt så kan skrivas som $n = 2k$ för något heltal k. Det medför att

$$m^3 2 = (2k)^3 \implies m^3 2 = 8k^3 \implies m^3 = 2(2k^3)$$

så m^3 är också jämnt. Enligt (a) medför det att m är jämnt och därmed har n och m en gemensam faktor (mer precis sagt 2 är en gemensam faktor av n och m). Det är ett motsägelse till antagande att n och m hade inga gemensamma faktorer och därfär måste $2^{\frac{1}{3}}$ måste vara irrationellt.

3.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{2x-6}{x-2}$$

med definitionsmängd $D = \{x \in \mathbf{R} \colon x \neq 2\}$.

(a) Visa att det inte finns något $x \in D$ sådant att $f(x) = 2$.

(b) Visa att till varje reellt tal $y \neq 2$ finns ett $x \in D$ sådant att $f(x) = y$.

Solution:

(a) Vi ger ett motsägelsebevis. Vi antar att det finns ett $x \in D$ sådant att $f(x) = 2$:

$$f(x) = 2 \implies \frac{2x-6}{x-2} = 2 \implies 2x - 6 = 2x - 4 \implies -6 = -4.$$

Eftersom $-6 \neq -4$ har vi räknat oss fram till ett motsägelse och därför kan det inte finnas ett $x \in D$ sådant att $f(x) = 2$.

(b) Vi betraktar ett $y \neq 2$ och räknar att

$$f(x) = y \impliedby \frac{2x-6}{x-2} = y \impliedby 2x-6 = xy-2y \impliedby x(2-y) = 6-2y \impliedby x = \frac{6-2y}{2-y}.$$

så $x = (6-2y)/(2-y)$ är sådant att $f(x) = y$ och utöver det är samma x ett element i D eftersom

$$2 = x = \frac{6-2y}{2-y} \implies 4 - 2y = 6 - 2y \implies 4 = 6.$$

4.

Använd trigonometriska likheterna

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi,$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

och

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$(\theta, \varphi \in \mathbf{R})$ för att visa

$$\cos(3\theta) = \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)$$

och

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

Solution:

Man kan räkna ut att

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \\
&= \cos(\theta + \theta)\cos\theta - \sin(\theta + \theta)\sin\theta \\
&= (\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta)\cos\theta - (\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)\sin\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos\theta(\cos^2\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) \\
&= \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta).
\end{aligned}$$

Och därför är

$$\cos(3\theta) = \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

Vi kan också räkna ut att

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

5.

(a) Visa att $\sin(2\theta) = \cos(3\theta)$ om $\theta = \frac{\pi}{10}$.

(b) Med hjälp av (a) och resultaten i uppgift 4 visa att $\theta = \frac{\pi}{10}$ är en lösning till

$$2\sin\theta = 1 - 4\sin^2\theta.$$

(c) Med hjälp av ekvationen i (b) visa att

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Solution:

(a) Vi vet att $\sin\phi = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$ för alla $\phi \in \mathbf{R}$ sa

$$\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

så om vi tar $\theta = \pi/10$ får vi att $\sin(2\theta) = \cos(3\theta)$.

(b) För $\theta = \frac{\pi}{10}$ är

$$2\sin\theta\cos\theta \underset{\text{upp. 4}}{\overset{\uparrow}{=}} \sin(2\theta) \underset{\text{(a)}}{\overset{\uparrow}{=}} \cos(3\theta) \underset{\text{upp. 4}}{\overset{\uparrow}{=}} \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)$$

och därför är

$$2\sin\theta = 1 - 4\sin^2\theta$$

eftersom $\cos(\pi/10) > 0$ så $\cos\theta$ kan strykas.

(c) Vi låter $t = \sin(\frac{\pi}{10})$ och löser $4t^2 + 2t - 1 = 0$:

$$4t^2 + 2t - 1 = 0 \iff 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Eftersom $\sin(\pi/10) > 0$ förkastar vi lösningen $t = (-1 - \sqrt{5})/4$ och får att

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

6.

Hitta alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $|z|^2 - z^2 - 3 + 2i = 0$.

Solution:

Vi skriver $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ så

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{och} \quad z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

och

$$\begin{aligned} |z|^2 - z^2 - 3 + 2i = 0 &\iff (x^2 + y^2) - (x^2 - y^2 + 2xyi) - 3 + 2i = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2y^2 - 3 = 0 & \text{och} \\ -2xy + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Första ekvationen säger att $y = \pm\sqrt{3/2}$ och sen den andra säger att $x = \pm\sqrt{2/3}$ med samma tecken. Därför är lösningarna $z = \pm\left(\sqrt{2/3} + i\sqrt{3/2}\right)$.

7.

I vårt grupparbete i lektionerna definierade vi en funktion

$$\mathrm{Log}(z) := \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

för nollskilda $z \in \mathbf{C}$ där ln är den naturliga logaritmfunktionen och $\mathrm{Arg}(z)$ är principalargumentet av z. Visa att

$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)$$

för $z, w \in \mathbf{C}$ sådana att $\mathrm{Arg}(z), \mathrm{Arg}(w) \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Solution:

För att förenkla beräkningarna skriver vi talen i polärform: $z = re^{i\theta}$ och $w = se^{i\phi}$ där $r, s > 0$ och $\theta, \phi \in (-\pi/2, \pi/2]$. Vi beräknar att $zw = re^{i\theta}se^{i\phi} = rse^{i(\theta+\phi)}$ så $|zw| = rs$ och eftersom $\theta + \phi \in (-\pi, \pi]$ är $\operatorname{Arg}(zw) = \theta + \phi$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(zw) &= \ln|zw| + i\operatorname{Arg}(zw) = \ln(rs) + i(\theta + \phi) \\
&= \ln r + \ln s + i\theta + i\phi \\
&= (\ln r + i\theta) + (\ln s + i\phi) \\
&= (\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)) + (\ln|w| + i\operatorname{Arg}(w)) \\
&= \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)
\end{aligned}$$