TATB04/TEN2 **Dugga 2, 2023-01-12**

Inledande matematisk analys

1.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}.$$

(a) Visa att det inte finns något tal x sådant att $f(x) = 1$.

(b) Visa att det till varje $y \in \mathbf{R}$ finns högst en lösning x till ekvationen $y = f(x)$.

(c) För vilka y finns det exakt en lösning x till $y = f(x)$?

Solution:

(a) Vi ger ett motsägelsebevis. Vi antar att det finns ett x sådant att $f(x) = 1$:

$$f(x) = 1 \implies \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} = 1 \implies \frac{x-3}{x+3} = 1 \implies x-3 = x+3 \implies -3 = 3.$$

Eftersom $-3 \neq 3$ har vi räknat oss fram till ett motsägelse och därför kan det inte finnas ett x sådant att $f(x) = 1$.

(b) Eftersom kvadratröt ger endast icke-negativa tal kan det inte finnas någon lösning alls för $y < 0$. Det finns inte heller någon lösning när $y = 1$. Vi kan därför räkna med $y \geq 0$ och $y \neq 1$ att

$$f(x) = y \implies \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} = y \implies \frac{x-3}{x+3} = y^2 \implies x - 3 = y^2(x+3)$$
$$\implies x(1-y^2) = 3 + 3y^2 \underset{1-y^2 \neq 0}{\underset{\uparrow}{\implies}} x = \frac{3+3y^2}{1-y^2},$$

så $x = \frac{3+3y^2}{1-y^2}$ är den enda möjliga lösning i fallet $y \geq 0$ och $y \neq 1$.

Sammanfattningsvis finns det för varje givet $y \in \mathbf{R}$ högst en lösning x till $f(x) = y$.

(c) Vi har redan visat att det inte finns någon lösning om $y < 0$ eller $y = 1$. För icke-negativa $y \neq 1$ kan vi räkna att

$$f\left(\frac{3+3y^2}{1-y^2}\right) = \sqrt{\frac{\left(\frac{3+3y^2}{1-y^2}\right) - 3}{\left(\frac{3+3y^2}{1-y^2}\right) + 3}} = \sqrt{\frac{(3+3y^2) - 3(1-y^2)}{(3+3y^2) + 3(1-y^2)}} = \sqrt{\frac{6y^2}{6}} \underset{y \geq 0}{\underset{\uparrow}{=}} y,$$

så det finns en lösning x när $y \geq 0$ och $y \neq 1$. (Och i så fall vet vi att lösningen är $x = \frac{3+3y^2}{1-y^2}$.)

2.

(a) Låt n vara ett heltal. Visa att

$$\begin{gathered} n^2 \text{ är jämnt delbart med 5 om och endast om} \\ n \text{ är jämnt delbart med 5.} \end{gathered} \tag{$*$}$$

(b) Varför fungerar inte ditt bevis i (a) om vi i båda instanser i ($*$) byter ut "jämnt delbart med 5" mot "jämnt delbart med 4"?

Solution:

(a) Först betraktar vi ett heltal n som är delbart med 5, så vi kan skriva $n = 5k$ för något $k \in \mathbf{Z}$. Därför är

$$n^2 = (5k)^2 = 5(5k^2)$$

och därför är även n^2 delbart med 5 eftersom $5k^2 \in \mathbf{Z}$.

För att visa att n är delbart med 5 om n^2 är delbart med 5, bevisar vi kontrapositionen:

Om n inte är delbart 5 är n^2 inte heller delbart med 5.

Därför antar vi att $n = 5k + r$ där $k \in \mathbf{Z}$ och $r = 1, 2, 3$ eller 4. Vi kan beräkna att

$$n^2 = (5k + r)^2 = 5(5k^2 + 2kr) + r^2$$

Tydligen är $5(5k^2 + 2kr)$ delbart med 5, men $r^2 = 1, 4, 9$ eller 16, så aldrig är delbart med 5. Därför är summan, det vill säga n^2, inte delbart med 5.

(b) Man kan bevisa att n^2 är delbart med 4 om n är delbart med 4, implikationen åt andra hållet är falsk (t.ex. $n = 2$). Man kan skriva $n = 4k + r$ där $k \in \mathbf{Z}$ och $r = 1, 2$ eller 3, och räkna

$$n^2 = (4k + r)^2 = 4(4k^2 + 2kr) + r^2$$

Återigen är $4(4k^2 + 2kr)$ delbart med 4, men $r^2 = 1, 4$ eller 9, så r^2 kan vara delbart med 4.

3.

(a) Kom ihåg att $e^x \geq 1 + x$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Betrakta implikationen

$$e^x \geq 1 + x \implies \ln(e^x) \geq \ln(1 + x) \tag{$\dagger$}$$

som gäller så länge $x > -1$ (och därmed är $\ln(1 + x)$ definierad). Vilken egenskap hos den naturliga logaritmfunktionen behöver vi för att rättfärdiga implikationen?

(b) Om vi sätter $x = b - 1$ i slutsatsen av ($\dagger$) ser vi att

$$\ln(b) \leq b - 1 \tag{$\ddagger$}$$

för $b > 0$. Använd ($\ddagger$) och räkneregler för den naturliga logaritmfunktionen för att visa

$$\ln(b) \geq \frac{b - 1}{b}$$

för $b > 0$. [Tips: byt ut b mot b^{-1}.]

Solution:

(a) Att den naturliga logaritmfunktionen är växande.

(b) Om $b > 0$ är även $b^{-1} > 0$ så vi får byta ut b mot b^{-1} i (‡) för att se

$$\ln(b^{-1}) \leq b^{-1} - 1 \implies -\ln(b) \leq \frac{1-b}{b} \implies \ln(b) \geq \frac{b-1}{b}$$

4.

(a) Betrakta ekvationen

$$|z - 3i| = 2|z|.$$

där $z \in \mathbf{C}$.

Visa att lösningarna z bildar en cirkel i det komplexa planet. Ange cirkelns medelpunkt och radie.

(b) Hitta en $\alpha > 0$ så att lösningarna z till

$$|z - 4i| = \alpha|z - 4|$$

bilder en rakt linje som går igenom punkten $2 + 2i$ i det komplexa planet. Vad är lutningen av linjen?

Solution:

(a) Vi sätter $z = x + iy$ och räknar att

$$\begin{aligned}
|z - 3i| = 2|z| &\iff |x + (y-3)i| = 2|x + iy| \\
&\iff \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \\
&\iff x^2 + (y-3)^2 = 4x^2 + 4y^2 \\
&\iff x^2 + y^2 - 6y + 9 = 4x^2 + 4y^2 \\
&\iff 0 = 3x^2 + 3y^2 + 6y - 9 \\
&\iff 0 = 3x^2 + 3(y+1)^2 - 12 \\
&\iff 0 = x^2 + (y+1)^2 - 4 \\
&\iff 4 = x^2 + (y+1)^2
\end{aligned}$$

och sista ekvationen är ekvationen för en cirkel med medelpunkt $-i$ och radie 2.

(b) Vi lärde oss i kursen att om $\alpha = 1$ har vi en rakt linje, så vi testar $\alpha = 1$ i ekvationen. Igen sätter vi $z = x + iy$ och räknar att

$$\begin{aligned}
|z - 4i| = |z - 4| &\iff |x + i(y-4)| = |(x-4) + iy| \\
&\iff \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\
&\iff x^2 + (y-4)^2 = ((x-4)^+ y^2) \\
&\iff x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 8x + 16 + y^2 \\
&\iff y = x.
\end{aligned}$$

Därför ser vi att

$$|z - 4i| = |z - 4|$$

bilder den raka linjen $y = x$ och det går ju igenom punkten $x = y = 2$ som är $2 + 2i$ i det komplexa planet. Lutningen är 1.

---

5. Observera att $3\theta = \pi - 2\theta$ för $\theta = \pi/5$, så

$$\sin(3\theta) = \sin(\pi - 2\theta).$$

(a) Bekräfta med hjälp av additionsformeln att

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \quad \text{för alla } \theta \in \mathbf{R}.$$

Dra slutsatsen att $\sin(3\theta) = \sin(2\theta)$ för $\theta = \pi/5$.

(b) Med hjälp av resultatet från del (a), additionsformelerna och trigonometriska ettan visa att

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

för $\theta = \pi/5$.

(c) Med hjälp av resultatet från del (b) visa att

$$4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$

när $\theta = \pi/5$.

Solution:

(a) Vi räknar att

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta = 0 - (-1)\sin\theta = \sin\theta,$$

så för $\theta = \pi/5$ är

$$\sin(3\theta) = \sin(\pi - 2\theta) = \sin(2\theta).$$

(b) Vi kan räkna att

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos(2\theta) + \cos\theta\sin(2\theta) \\
&= \sin\theta\cos(\theta + \theta) + \cos\theta\sin(\theta + \theta) \\
&= \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\cos\theta\sin\theta\cos\theta \\
&= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta(1 - \sin^2\theta) - \sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta
\end{aligned}$$

och

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Därför är

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin(3\theta) = \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

för $\theta = \pi/5$.

(c) Eftersom $0 < \pi/5 < \pi$ är $\sin(\pi/5) \neq 0$, därför kan vi delar ekvationen i del ((b)) med $\sin(\pi/5)$:

$$3 - 4\sin^2\theta = 2\cos\theta.$$

när $\theta = \pi/5$. Med hjälp av trigonometriska ettan ser vi att

$$2\cos\theta = 3 - 4\sin^2\theta = 3 - 4(1 - \cos^2\theta) = -1 + 4\cos^2\theta$$

när $\theta = \pi/5$.

6.

(a) Lös ekvationen $4x^2 - 2x - 1 = 0$ för x.

(b) Med hjälp av (c) från uppgift 5 visa att

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Solution:

(a) Vi kvadratkompletterar för att se

$$0 = 4x^2 - 2x - 1 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

så

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

är båda lösningarna till ekvationen.

(b) Om vi sätter $x = \cos(\pi/5)$ ser vi från uppgift 5 att x löser ekvationen $0 = 4x^2 - 2x - 1$. Men eftersom $0 < \pi/5 < \pi/2$ är $\cos(\pi/5) > 0$, så

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

eftersom $(1 - \sqrt{5})/4 < 0$.

7.

Finn alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till ekvationen

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0.$$

Solution:

Vi kvadratkompletterar:

$$z^6 - 9z^3 + 8 = \left(z^3 - \frac{9}{2}\right)^2 + 8 - \frac{81}{4} = \left(z^3 - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}.$$

Så

$$z^6 - 10z^3 + 9 = 0 \iff \left(z^3 - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0 \iff \left(z^3 - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$
$$\iff z^3 - \frac{9}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}} \iff z^3 = 1 \text{ eller } 8.$$

Nu försöker vi hitta alla lösningar till $z^3 = 1$. Vi letar efter $z = re^{i\theta}$ för $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$ och skriver $1 = e^{2k\pi i}$ för $k \in \mathbf{Z}$.

Sedan är

$$r^3 e^{3i\theta} = (re^{i\theta})^3 = z^3 = 1 = e^{2k\pi i}$$

så $r^3 = 1$ och $3\theta = 2k\pi$. Därför är $r = 1$ och $\theta = 2k\pi/3$ för $k \in \mathbf{Z}$. Det ledar till lösningarna

$$e^0 = 1, \quad e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{och} \quad e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

För att löser $z^3 = 8$ gör vi en liknande analys. Vi letar efter $z = re^{i\theta}$ för $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$ och skriver $8 = 8e^{2k\pi i}$ för $k \in \mathbf{Z}$.

Sedan är

$$r^3 e^{3i\theta} = (re^{i\theta})^3 = z^3 = 8 = 8e^{2k\pi i}$$

så $r^3 = 8$ och $3\theta = 2k\pi$. Därför är $r = \sqrt[3]{8} = 2$ och $\theta = 2k\pi/3$ för $k \in \mathbf{Z}$. Det ledar till lösningarna

$$2e^0 = 2, \quad 2e^{2\pi i/3} = -1 + \sqrt{3}i \quad \text{och} \quad 2e^{4\pi i/3} = -1 - \sqrt{3}i.$$

Sammanfattningsvis har vi visat att det finns sex olika lösningar.