TATB04/TEN2 **Dugga 2, 2024-01-11**

Inledande matematisk analys

1. Richard Feynmann var ett nobelpristagare i fysik. Under hans barndom lärde han sig följande trigonometrisk likhet från en annan pojke som hette Morrie Jacobs:

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}.$$

Därför heter likheten Morries lag.

(a) Med hjälp av additionsformler eller dubbelvinkel formler visa att

$$\cos(2^{n-1}\theta) = \frac{\sin(2^n\theta)}{2\sin(2^{n-1}\theta)}$$

för $n \in \mathbf{Z}$ och vinklar θ sådant att $\dfrac{2^{n-1}\theta}{\pi} \notin \mathbf{Z}$.

(b) Använd resultatet från (a) (tre gånger) för att bevisa Morries lag.

Solution:

(a) Från additionsformeln för sinus vet vi att

$$\begin{aligned}\sin(2^n\theta) &= \sin(2(2^{n-1}\theta + 2^{n-1}\theta)) = \sin(2^{n-1}\theta)\cos(2^{n-1}\theta) + \cos(2^{n-1}\theta)\sin(2^{n-1}\theta)\\ &= 2\cos(2^{n-1}\theta)\sin(2^{n-1}\theta)\end{aligned}$$

så

$$\cos(2^{n-1}\theta) = \frac{\sin(2^n\theta)}{2\sin(2^{n-1}\theta)}$$

om $\sin(2^{n-1}\theta) \neq 0$. Detta villkor är uppfyllt om $\dfrac{2^{n-1}\theta}{\pi} \notin \mathbf{Z}$.

(b) Likheten från (a) i fallet $\theta = \pi/9$ och $n = 1, 2$ och 3 ger oss att

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} \quad \text{och}$$
$$\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)}.$$

Så om vi multiplicerar de ihop får vi att

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}\frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)},$$

men eftersom $\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right) = \sin\left(\pi - \frac{8\pi}{9}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ är

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}.$$

---

2. Ge ett bevis av Bernoullis olikhet:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

för $x \geq -1$ och $n \in \mathbf{Z}_+$. Notera tydligt där du använder dig av antagandet $x \geq -1$.

Solution: Vi ger ett induktionsbevis. Först kontrollerar vi att

$$(1+x)^n = 1 + x$$

och

$$1 + nx = 1 + x$$

när $n = 1$, så basfallet är bevisat.

Om vi antar att Bernoullis olikhet är sant för något $n \in \mathbf{Z}_+$ kan vi beräkna att

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \geq -1}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

det vill säga vi kan härleda Bernoullis olikhet där n utbyts mot $n+1$.

Enligt induktionsprincipen är Bernoullis olikhet bevisat för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

---

3. Visa att

$$\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{\sin(3\theta)}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

Solution: Med hjälp av additionsformler och den trigonometriska ettan kan vi räkna att

$$\begin{aligned}
\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) &= \sin\theta \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\right) \\
&= \sin\theta\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos^2\theta - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta\right) \\
&= \sin\theta\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) \\
&= \sin\theta\left(\frac{3}{4}\left(1 - \sin^2\theta\right) - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\sin\theta\left(3 - 4\sin^2\theta\right)}{4}
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= \sin(\theta + 2\theta) \\
&= \sin\theta\cos(2\theta) + \cos\theta\sin(2\theta) \\
&= \sin\theta\cos(\theta+\theta) + \cos\theta\sin(\theta+\theta) \\
&= \sin\theta\left(\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta\right) + \cos\theta\left(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta\right) \\
&= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \\
&= \sin\theta\left(3 - 4\sin\theta\right).
\end{aligned}$$

Därför är

$$\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{\sin(3\theta)}{4}.$$

---

4. Betrakta funktionen $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som är definierad med hjälp av den naturliga exponentialfunktionen enligt formeln

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Med hjälp av de olikheterna du känner till för exponentialfunktionen visa att

$$\sinh x \geq \frac{x^2 + 2x}{2 + 2x}$$

för $x > -1$.

Solution: Från sats 6.5 vet vi att

$$\exp(x) \geq 1 + x \tag{1}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Vi vet också från sats 6.5 att $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$ för $x < 1$, därför är

$$\exp(-x) \leq \frac{1}{1+x} \tag{2}$$

för $x > -1$. Alternativt, om vi inte kommer ihåg att $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$, kan vi räkna utifrån (1) att

$$\frac{1}{\exp(-x)} = \exp(x) \geq 1 + x \implies \exp(-x) \leq \frac{1}{1+x} \quad \text{så länge } x + 1 > 0.$$

Med hjälp av (1) och (2) ser vi att

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\
&\geq \frac{(1+x) - \frac{1}{1+x}}{2} \\
&= \frac{(1+x)^2 - 1}{2(1+x)} = \frac{x^2 + 2x}{2 + 2x}
\end{aligned}$$

för $x > -1$.

---

5. Utifrån det du vet om den naturliga exponentialfunktionen visa att funktionen $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som är definierad i uppgift 4 är bijektiv. Ge den inversa funktionen.

Solution: För att visa sinh är bijektiv vill vi för varje $y \in \mathbf{R}$ visa att

$$\sinh x = y$$

har en entydig lösning x. Vi räknar att

$$\begin{aligned}
\sinh x = y &\iff \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = y \iff \exp(x) - \exp(-x) - 2y = 0 \\
&\iff \exp(x)^2 - 2y\exp(x) - 1 = 0 \\
&\iff (\exp(x) - y)^2 - 1 - y^2 = 0 \\
&\iff (\exp(x) - y)^2 = 1 + y^2 \\
&\iff \exp(x) - y = \pm\sqrt{1+y^2} \\
&\iff \exp(x) = y \pm \sqrt{1+y^2}
\end{aligned}$$

Därför är $\sinh x = y$ ekvivalent med att $\exp(x) = y + \sqrt{1+y^2}$ eller $\exp(x) = y - \sqrt{1+y^2}$.

Eftersom $\sqrt{1+y^2} > |y|$ är

$$y - \sqrt{1+y^2} < y - |y| \leq 0 \quad \text{och} \quad y + \sqrt{1+y^2} > y + |y| \geq 0$$

för varje $y \in \mathbf{R}$. Detta (tillsammans med att $\exp\colon \mathbf{R} \to [0,\infty)$ är bijektiv) innebär att det inte finns något x sådant att $\exp(x) = y - \sqrt{1+y^2}$ men $\exp(x) = y + \sqrt{1+y^2}$ är ekvivalent med $x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$. Därför är

$$\sinh x = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

för varje $y \in \mathbf{R}$ och sinh är bijektiv. Från våra beräkningar ser vi att

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

för $x \in \mathbf{R}$.

6.

(a) Hitta alla lösningar $w \in \mathbf{C}$ till $w^2 = -\dfrac{2\sqrt{5}+10}{16}$.

(b) Hitta alla lösningar $w \in \mathbf{C}$ till $w^2 = \dfrac{2\sqrt{5}-10}{16}$.

(c) Visa att alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $z^2 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$ är

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}.$$

Solution:

(a) Eftersom vi letar efter komplexa lösningar sätter vi $w = u + iv$ där $u, v \in \mathbf{R}$. Ekvationen är då ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = -\frac{2\sqrt{5}+10}{16}; \\ 2uv = 0. \end{cases}$$

Lösningarna till systemet är

$$\begin{cases} v = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4} \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{och}$$

så lösningarna är $z = \pm i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$.

(b) Med substitutionen $w = u + iv$ där $u, v \in \mathbf{R}$ är ekvationen ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = \frac{2\sqrt{5}-10}{16}; \\ 2uv = 0. \end{cases}$$

Lösningarna till systemet är

$$\begin{cases} v = \pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{och}$$

så lösningarna är $z = \pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

(c) Vi kvadratkompletterar ekvationen för att se

$$0 = z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = \left(z + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{10+2\sqrt{5}}{16}.$$

Därför om vi jämför ekvationen med den i del (a) ser vi att

$$z + \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \pm i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$$

och därmed är lösningarna

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}.$$

---

7. Vi kan enkelt lösa ekvationen

$$z^5 - 1 = 0$$

för z i polär form och får att lösningarna är

$$z = e^{2k\pi i/5} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$$

för $k = -2, -1, 0, 1,$ och 2.

(a) Skissa en bild av de givna lösningarna z i den komplexa planet.

(b) Förenkla

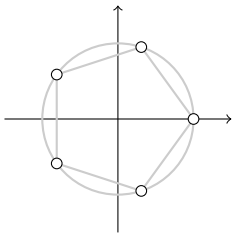
$$(z-1)\left(z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1\right)\left(z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1\right).$$

(c) Med hjälp av lösningarna från uppgift 6(c) räkna ut

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{och} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Motivera noggrant ditt svar!

Solution:



(a) Här är en skiss.

(b) Vi räknar

$$\begin{aligned}
&(z-1)\left(z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1\right)\left(z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right)\\
&=(z-1)\left(z^4+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^3+\left(1+1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)z^2\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z+1\right)\\
&=(z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)\\
&=\left(z^5+z^4+z^3+z^2+z\right)-\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)\\
&=z^5-1
\end{aligned}$$

(c) Enligt del (b) ser vi att vi kan vi skriva om

$$0=z^5-1=(z-1)\left(z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1\right)\left(z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right).$$

Därför är de två lösningarna i uppgift 6(c) också lösningar till $z^5-1=0$ och därmed två av de fem som ges i början av den här uppgiften. Lösningarna i uppgift 6(c) har positiva realdelar, så kan endast vara $\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$ med $k=-1,0$ eller 1 för att de andra har icke-positiva realdelar. Utöver det är den imaginärdel av den ena lösningen i uppgift 6(c) den negativa av den andra, därför kan de lösningar inte komma från fallet $k=0$. Därför måste

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

och även $\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Vi vet att $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)<0$ och $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$, så

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$$

samt även $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$.