Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
2024-08-15

---

1. Låt $A = \{a, c\}$, $B = \emptyset$ och $C = \{c, d\}$ vara delmängder i $\mathcal{U} = \{a, b, c, d\}$.

   a) Vi får då $(A^c \cap B^c) \setminus C^c = (\{b, d\} \cap \{a, b, c, d\}) \setminus \{a, b\} = \{b, d\} \setminus \{a, b\} = \{d\}$.

   b) Vilka av följande påståenden är med givna mängder sanna respektive falska?

   i. $A^c \setminus B^c = B$ ii. $A^c \cap B^c \subseteq A$ iii. $A \subseteq B \Rightarrow B \subseteq \mathcal{U}$

   i. $A^c \setminus B^c = \{b, d\} \setminus \{a, b, c, d\} = \emptyset = B$, så första påståendet är **sant**.

   ii. $A^c \cap B^c = \{b, d\} \cap \{a, b, c, d\} = \{b, d\}$. Men $\{b, d\} \not\subseteq A = \{a, c\}$, då b och d inte är element i A. Påståendet är alltså **falskt.**

   iii. $A \not\subseteq B$ då a och c inte finns i B, så $A \subseteq B$ är falskt. Att $B \subseteq \mathcal{U}$ är dock sant då alla element i B finns i $\mathcal{U}$. Påståendet $A \subseteq B \Rightarrow B \subseteq \mathcal{U}$ blir **sant**, då implikationen är sann när förledet är falskt.

Svar: a) $(A^c \cap B^c) \setminus C^c = \{d\}$.
b) Påståendena i och iii är sanna, påstående ii är falskt.

2. a) Då grafen är ett träd gäller enligt sats att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar.
   Om vi kallar antalet löv (de med gradtal 1) för x så blir antalet noder i grafen uttryckt i x: $N = 12 + x$. Enligt handskakningslemmat är summan av gradtalen i en graf lika med antalet bågar gånger 2, vilket ger:
   $B = \dfrac{12 \cdot 3 + x \cdot 1}{2} = \dfrac{36 + x}{2}$.
   Nu har vi både N och B uttryckta i x och kan sätta in det i sambandet för träd. Vi får:
   $N = B+1 \Leftrightarrow 12+x = \dfrac{36 + x}{2}+1 \Leftrightarrow 11+x = \dfrac{36 + x}{2} \Leftrightarrow 22+2x = 36+x \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 22 + x = 36 \Leftrightarrow x = 14.$ Grafen har alltså 14 löv.

   b) Vi har $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{a, b, c, d\}$. Antalet funktioner från A till B fås genom att beräkna antalet sätt vi kan välja precis en bild till vardera element i A. (Bilderna vi väljer i B behöver dock inte vara olika.) För elementet 1 i A finns 4 bilder att välja i B. Det samma gäller elementen 2 och 3. Totalt finns därför enligt multiplikationsprincipen $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ olika funktioner från A till B.
   En surjektiv funktion täcker målmängden med bilder, men då B i detta fall innehåller fler element än A finns ingen surjektiv funktion, så ingen av de 64 funktionerna är surjektiv då det alltid kommer finns ett eller flera element (om något upprepas) i B som inte är bild till något element i A.

Svar: a) Grafen har 14 löv.
b) Det finns 64 funktioner från A till B, men ingen av dessa är surjektiv.

3. a) Ett exempel på ett satslogiskt uttryck som är en tautologi är $p \vee \neg p$, då uttrycket är sant på alla rader i sanningsvärdestabellen, se tabellen till höger. Oavsett om p är sann eller falsk så blir det sammansatta uttrycket sant.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

b) Vi studerar uttrycket nedan och utgår från att uttrycket har sanningsvärdet falskt. Vi skriver ner vårt resonemang i punktform.

$$(p \vee \neg r) \wedge (s \to r) \to p$$

1.) Operationen som ska vara falsk är därmed den sista implikationspilen. Implikationen är bara falsk om förledet är sant samtidigt som efterledet är falskt. Alltså måste p vara falsk.

2.) Att $(p \vee \neg r) \wedge (s \to r)$ är sant innebär att både $(p \vee \neg r)$ och $(s \to r)$ är sanna.

3.) Då p är falsk enligt 1.) men $(p \vee \neg r)$ ska vara sann så måste $\neg r$ vara sann.

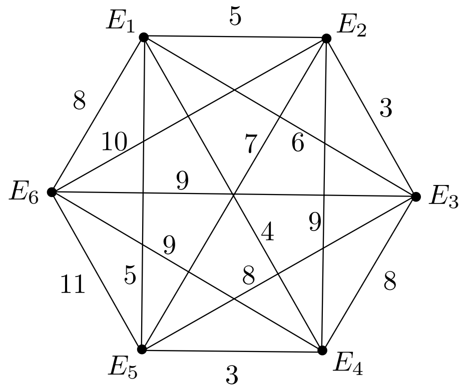
4.) Då $\neg r$ är sann så är r falsk.

5.) Då $(s \to r)$ är sann enligt 2.) och r är falsk enligt 4.) så måste s också vara falsk. Utifrån givna förutsättningar är s alltså **falsk**.

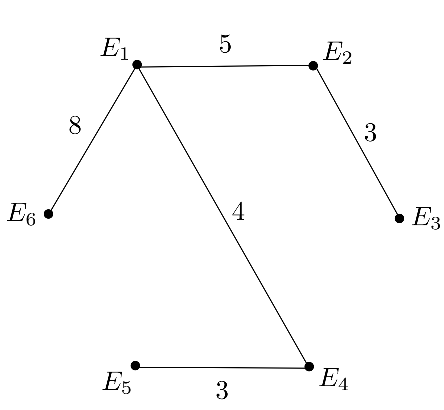
Svar: a) Ett exempel på en tautologi är $p \vee \neg p$. Se tabell ovan.
b) Satsparametern s måste vara falsk för att hela uttrycket ska bli falskt.

4. Med de givna kostnaderna för anslutningar i uppgiften fås den viktade grafen nedan.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
E_1	-	5	6	4	5	8
E_2	-	-	3	9	7	10
E_3	-	-	-	8	8	9
E_4	-	-	-	-	3	9
E_5	-	-	-	-	-	11



Vi använder Kruskals algoritm för att ta fram ett minimalt spännande träd (billigaste nätverk) till denna graf. Börja med noderna utan några bågar. De billigaste bågarna är 2-3 resepktive 4-5 med kostnad 3. Båda väljs utan att cykel bildas. Nästa billigaste båge är 1-4 som kostar 4. Den väljs då cykel ej bildas. Nästa billigaste bågar är de med kostnad 5. Bågen 1-2 väljs då cykel ej bildas, men båge 1-5 väljs ej då cykel med de tidigare valda bågarna bildas. Nästa billigaste båge är 1-3 med kostnad 6, väljs ej då cykel bildas. Nästa billigaste båge är 2-5 med kostnad 7, väljs ej då cykel bildas. Nästa billigaste bågar är de med kostnad 8. Båge 1-6 väljs då cykel ej bildas. Nu har 5 bågar valts och med 6 noder har vi därmed ett minimalt spännande träd. Se figur till höger.



Kostnaden för detta är $3 + 3 + 4 + 5 + 8 = 23$ tusen kronor.

Svar: Se graf med kostnader samt minimalt spännade träd ovan. Kostnad 23 000 kr.

5. a) Hur många olika bokstavsföljder med 8 bokstäver kan vi bilda med bokstäverna i ordet SEMESTER ?

8 bokstäver kan omordnas på 8! sätt enligt multiplikationsprincipen, men då det finns dubbelt av S och trippelt av E får vi samma bokstavsföljd flera gånger. Vi dividerar därför med antalet sätt S:n och E:na kan omordnas för att bara räkna varje följd en gång. Detta ger:

$$\frac{8!}{2! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 56 \cdot 10 \cdot 6 = 560 \cdot 6 = 3360.$$

Det finns alltså 3360 olika bokstavssföljder med de 8 bosktäverna i SEMESTER.

b) Hur många av dessa bokstavsföljder innehåller inte två E intill varandra?

För att räkna detta på ett enkelt sätt räknar vi först ut på hur många sätt de bokstäver som inte är E:n kan ordnas, det vill säga bokstäverna SMSTR. Med 5 bokstäver och dubbelt av S får vi med samma sätt att tänka som i a) uttrycket:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 60.$$

För varje sådan följd skapar vi nu en tom plats före första bokstaven, mellan bokstäverna och efter sista bokstaven, till exempel: _S_S_M_T_R_

Sedan väljer vi 3 av dessa 6 platser för E:na, vilket kan göras på:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ sätt.}$$

Att ordna övriga bokstäver och välja plats för E:na kan då totalt göras på $60 \cdot 20 = 1200$ sätt, enligt multiplikationsprincipen.

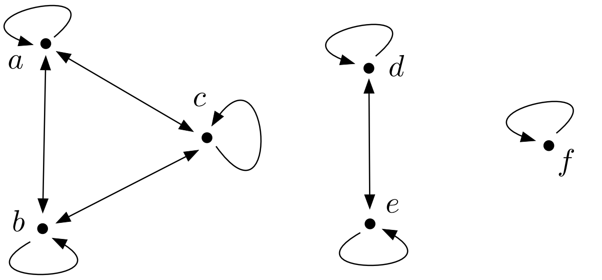
Svar: a) Det går att bilda 3360 olika följder med bokstäverna i ordet SEMESTER.
b) 1200 av de i a) innehåller inte två E intill varandra.

(En tanke kan vara att ta alla i a) och dra bort de med två E intill varandra, men då det finns tre E blir det svårare att ordna utan att dubbelräkna.)

6. Vi har $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ och definierar relationen $\mathcal{R}$ på A enligt:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e),(f,f)\}$$

Denna realtionen har grafen som visas nedan.



Vi motiverar vilka egenskaper som gäller respektive inte gör det:

Relationen är reflexiv då samtliga noder är relaterade till sig själva.

Relationen är symmetrisk då samtliga pilar i grafen är dubbelriktade.

Var god vänd!

Realtionen är inte antisymmetrisk då det finns dubbelriktade pilar, t ex både (a, b) och (b, a).

Relationen är transitiv då varje tvåstegsförbindelse mellan två element via ett tredje element, alltid också har en direkt förbindelse. T ex (a, b) och (b, c) så finns (a, c) och t ex (a, b) och (b, a) så finns också (a, a).

Då relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv uppfyller den kraven för att vara en ekvivalensrelation. Ekvivalensklasserna är $[a] = \{a, b, c\}$, $[d] = \{d, e\}$ och $[f] = \{f\}$. En relation är en partialordning om den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, men då denna relation inte är antisymmetrisk är den heller inte en partialordning.

Svar: Se ovan.

7. Vi har de logiska premisserna:

Om solen skiner och det är varmt så tar vi en dag på stranden. Om vi tar en dag på stranden så köper vi glass. Det är varmt och vi köper inte glass.

Låt p : solen skiner, q : det är varmt, r : vi tar en dag på stranden, s : vi köper glass.

Uttrycket ovan blir då på satslogisk form:

$$(p \wedge q \to r) \wedge (r \to s) \wedge (q \wedge \neg s)$$

Med dessa som förutsättningar kan vi dra slutsatsen ”solen skiner inte”. Vi väljer att visa följande slutledning med hjälp av deduktion. (Kan också göras med reduktionsmetoden eller sanningsvärdestabell.)

$$(p \wedge q \to r) \wedge (r \to s) \wedge (q \wedge \neg s) \;\Rightarrow\; \neg p$$

1.)	$q \wedge \neg s$	Förutsättning
2.)	$\neg s$	1.) och konjunktiv förenkling.
3.)	$r \to s$	Förutsättning
4.)	$\neg r$	2.), 3.) och modus tollens.
5.)	$p \wedge q \to r$	Förutsättning
6.)	$\neg(p \wedge q)$	4.), 5.) och modus tollens.
7.)	$\neg p \vee \neg q$	6.) och De morgans lag.
8.)	q	1.) och konjunktiv förenkling.
9.)	$\neg(\neg q)$	8.) och dubbel negation.
10.)	$\neg p$	7.), 9.) och disjunktiv syllogism.

Vi har härlett slutsatsen $\neg p$ ur förutsättningarna och därmed visat att slutsatsen ”solen skiner inte” är en logisk följd ur givna förutsättningar.

Svar: Vi har visat att ”solen skiner inte” är en korrekt slutsats ur de givna premisserna.