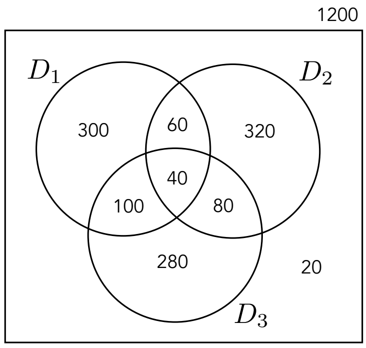
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
2025-01-17

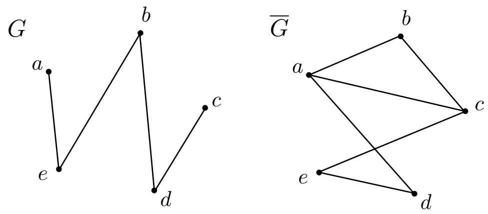


1. Med hjälp av ett venndiagram, där vi låter de tre databaserna utgöra var sin mängd, kan vi med informationen i uppgiften successivt räkna ut hur många som finns i varje område. Vi startar med de 40 som finns i alla tre databaserna och kan sedan arbeta oss utåt. När vi fått ut alla antal i cirklarna kan vi summera dessa, vi får: $300+60+40+100+320+80+280 = 1180$. Det gör att $1200-1180 = 20$ finns utanför de tre cirklarna. Vi kan nu besvara frågorna:

   a) Hur många av företagets kunder finns inte någon av de tre databaserna?
   Dessa är de 20 som ligger utanför D_1, D_2 och D_3.

   b) Hur många kunder finns i D_3, men inte i någon av D_1 och D_2?
   Dessa är de 280 som ligger i D_3, men utanför de övriga två.

   Svar: a) 20 kunder finns inte i de tre datbaserna.
   b) 280 kunder finns i D_3, men inte i D_1 eller D_2.



2. a) Grafen G är sammanhängande då det för varje par av noder finns en väg mellan dessa i G. Komplementgrafen $\overline{G}$ till G anges till höger. Komplementgrafen har bågar mellan de par av noder som inte har en båge i G.

   b) Enligt satsen för träd gäller att $N = B + 1$, där N är antalet noder i trädet och B är antalet bågar. Om vi sätter antalet noder av grad 4 till x så finns det enligt uppgift $N = 18 + 4 + x = 22 + x$ noder.
   Handskakningslemmat säger att summan av gradtalen är två gånger antalet bågar, vilket ger oss:
   $$B = \frac{\text{summan av gradtalen}}{2} = \frac{18 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + x \cdot 4}{2} = \frac{30 + 4x}{2} = 15 + 2x.$$
   Vi sätter nu in uttrycken för N och B som vi fått ovan i sambandet för träd, vi får:
   $N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 22 + x = 15 + 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; 22 = 16 + x \;\Leftrightarrow\; x = 6$. Grafen måste alltså innehålla 6 noder av grad 4.

   Svar: a) G är sammanhängande. Se $\overline{G}$ ovan.
   b) Grafen måste innehålla 6 noder av grad 4.

3. Vi har 8 pärlor i 8 olika färger och ska skapa en färgkod genom att plocka ut tre pärlor bland de 8 och lägga dem i en viss ordning.

   a) Antalet färgkoder som kan bildas kan vi räkna ut genom att tänka att första platsen kan väljas på 8 sätt, nästa på 7 och sista på 6 sätt. Totalt fås då $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$, enligt multiplikationsprincipen.

   b) Antalet färgkoder som innehåller en röd pärla men inte en grön kan fås genom att först placera ut den röda pärlan på någon av de tre platserna, det kan göras på 3 sätt. Sedan kan vi fylla på med pärlor på de återstående två platserna, men där vi inte väljer den gröna pärlan utan bara bland de 6 andra, vilket ger $6 \cdot 5$ sätt. Totalt fås då $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$ färgkoder, enligt multiplikationsprincipen.

   c) För att räkna ut antalet färgkoder där en röd pärla ligger direkt till vänster om en blå kan vi först konstatera att det finns två möjligheter: röd längst till vänster och blå i mitten eller röd i mitten och blå längst till höger. I vardera av dessa två fall ska en tredje kula väljas, vilket kan göras på 6 sätt. Vi får alltså $2 \cdot 6 = 12$ olika sådana färgkoder, enligt multiplikationsprincipen.

   Svar: a) Det finns 336 olika färgkoder.
   b) Det finns 90 färgkoder med en röd, men ingen grön pärla.
   c) Det finns 12 färgkoder där en röd ligger direkt till vänster om en blå pärla.

4. Vi har $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d\}$, $C = B \cap B^c = \{b.d\} \cap \{a, c, e\} = \emptyset$ och grundmängden $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$.

   a) Vi får $(B^c \setminus C) \cap (A \setminus B) = (\{b, d\}^c \setminus \emptyset) \cap (\{a, b, c, d\} \setminus \{b, d\}) =$
   $= (\{a, c, e\} \setminus \emptyset) \cap (\{a, c\}) = \{a, c, e\} \cap \{a, c\} = \{a, c\}$.

   b) Antalet delmängder till mängden B är $2^2 = 4$, då B har 2 element och för vardera element kan vi välja om det ska vara med eller ej när vi bildar olika delmängder. Mängden $C = \emptyset$, så denna har bara en delmängd, nämligen $\emptyset$.

   c) Antalet funktioner från A till B kan fås genom att till varje element i A välja precis en bild i B. Då A har 4 element och B har 2 element får vi upprepa valet 4 gånger med två möjligheter i varje val, nämligen bilderna b eller d i B. Detta ger $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ olika funktioner enligt multiplikationsprincipen. En funktion är surjektiv om varje element i målmängden B är bild till något element i A. Nästan alla de 16 funktionerna är surjektiva. Det är bara om vi väljer b som bild till alla element i A eller om vi väljer d som bild till alla i A som funktionen inte blir surjektiv. Vi tar bort dessa två funktioner och får att $16 - 2 = 14$ av alla funktioner som kan bildas från A till B är surjektiva.

   Svar: a) $(B^c \setminus C) \cap (A \setminus B) = \{a, c\}$.
   b) B har fyra delmängder och $C = \emptyset$ har en delmängd.
   c) Det finns 16 funktioner från A till B och 14 av dessa är surjektiva.

5. a) Vi kan visa att $\neg(r \wedge p) \vee q$ är logiskt ekvivalent med $\neg r \vee (p \to q)$ genom omskrivning eller med en sanningsvärdestabell. Vi visar båda nedan, fast det räcker med en av dem. Först omskrivning utifrån kända ekvivalenser från formelbladet:

$$\neg(r \wedge p) \vee q \underset{\text{De morgans lag}}{\Leftrightarrow} (\neg r \vee \neg p) \vee q \underset{\text{Associativa lagar}}{\Leftrightarrow} \neg r \vee (\neg p \vee q) \underset{\text{Implikationslagen}}{\Leftrightarrow} \neg r \vee (p \to q)$$

Var god vänd!

Vi visar det nu också med sanningsvärdestabell.

p	q	r	$r \wedge p$	$\neg(r \wedge p)$	$\neg(r \wedge p) \vee q$	$\neg r$	$p \to q$	$\neg r \vee (p \to q)$
1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Vi ser i kolumn 6 pch 9 att sanningsvärdena för de två uttrycken är lika på alla rader. Alltså är de logiskt ekvivalenta.

b) "Tjugondag Knut dansas julen ut. Om granen barrar dansas inte julen ut tjugondag Knut. Om inte granen barrar varar julen ända till påsk. Alltså varar julen ända till påsk."

Vi inför följande satsparametrar:
p: Tjugondag Knut dansas julen ut.
q: Granen barrar.
r: Julen varar ända fram till påsk.

Uttrycket ovan kan då skrivas som satslogiskkt uttryck:

$$p \wedge (q \to \neg p) \wedge (\neg q \to r) \;\Rightarrow\; r$$

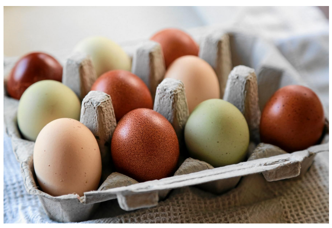
Vi visar att denna slutledning är korrekt med hjälp av deduktion. Detta kan också göras med någon av de andra två metoderna reduktionsmetoden eller med sanningsvärdestabell. Deduktionen blir som följer.

1.)	p	Förutsättning.
2.)	$\neg(\neg p)$	1.) och dubbel negation.
3.)	$q \to \neg p$	Förutsättning.
4.)	$\neg q$	2.), 3.) och modus tollens.
5.)	$\neg q \to r$	Förutsättning.
6.)	r	4.), 5.) och modus ponens.

Vi har härlett slutsatsen r ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: a) Uttrycken är logiskt ekvivalenta, se ovan.
b) Slutledningen är korrekt. Se satslogiskt uttryck och deduktion ovan.

6. Vi ska köpa 12 ägg och affären du handlar i har tre sorter: vita, bruna och ljusgröna från frigående höns. Vi betraktar ägg i samma färg som lika och tar inte hänsyn till hur de placeras i äggkartongen. Ordningen spelar alltså ej roll mellan äggen så det handlar om en kombination. Då vi får upprepa samma färg är det en kombination med upprepning, alltså ett staketproblem.



a) På hur många olika sätt kan vi välja ut 12 ägg bland de tre färgerna?

Var god vänd!

Med tre färger får vi två staket. Vi ska välja 12 ägg, så totalt 12+2 objekt, där vi väljer plats för 2 staket, så formeln för kombinationer med upprepning ger

$$\binom{12+2}{2} = \binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91$$

Det finns alltså 91 olika sätt att välja en färgkombination för 12 ägg bland 3 färger.

b) Hur många sätt finns det om vi lägger till kravet att minst två ska vara vita? Tag först två vita. Återstår att välja 10 ägg bland de 3 färgerna. På samma sätt som i a) fås en kombination med upprepning och antalet blir:

$$\binom{10+2}{2} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

Det finns alltså 66 sätt att välja en färgkobination för 12 ägg bland tre färger, där minst två är vita.

c) Hur många sätt kan vi välja 12 ägg bland de tre färgerna om vi ska ha max tre bruna och max tre ljusgröna? Vi räknar ut hur många färgkombinationer som innehåller mer än tre bruna *eller* mer än tre ljusgröna och drar sedan bort det från det totala antalet.

Antalet som innehåller fler än tre bruna, det vill säga fyra eller fler bruna, kan fås genom att starta med fyra bruna och sedan välja ytterligare 8 ägg bland de tre färgerna. Vi har som tidigare en kombination med upprepning. Detta ger:

$$\binom{8+2}{2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

Antalet som innehåller mer än tre ljusgröna blir på samma sätt 45 stycken. I dessa två urval finns dock ett överlapp eftersom ett antal av de 45 som innehåller mer än tre bruna också innehåller mer än tre ljusgröna. Antalet som innehåller 4 eller fler bruna **och** 4 eller fler ljusgröna kan fås genom att starta med 4 bruna och 4 ljusgröna och sedan välja ytterligare 4 ägg bland 3 färger, med samma beräkning som tidigare fås då: $\binom{4+2}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ sätt.

Antalet som innehåller mer än tre bruna och mer än tre ljusgröna ägg bli alltså $45 + 45 - 15 = 75$. Antalet som innehåller max tre bruna och max tre ljusgröna blir då $91 - 75 = 16$ stycken färgkombinationer.

(Med max tre bruna och max tre ljusgröna så måste vi ha minst 6 vita. Urvalet kan därför också göras genom att starta med 6 vita, räkna ut alla sätt att fylla återstående 6 platser med tre färger och sedan dra bort de med mer än tre bruna respektive mer än tre ljusgröna på 6 platser. Detta ger $28 - 6 - 6 = 16$ sätt.)

Svar: a) Det finns 91 olika sätt att välja 12 ägg bland tre färger.
b) 66 av de 91 i a) innehåller minst två vita ägg.
c) Det finns 16 kombinationer med max tre bruna och max tre ljusgröna.

7. Vi har $A = \{1, 2, 3\}$ och potensmängden $\mathcal{P}(A)$ är mängden av alla delmängder, så vi får: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{P}(A)$ genom att säga att $B\mathcal{R}C$ om $B \subseteq C$, där B och C är element i $\mathcal{P}(A)$.

Var god vänd!

a) Vi visar att $\mathcal{R}$ är en partialordning på $\mathcal{P}(A)$.

En relation är en partialordning om den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

En relation är **reflexiv** om varje element är relaterad till sig själv. $\mathcal{R}$ är reflexiv, då varje mängd är en delmängd till sig själv, det vill säga $B \subseteq B$ för alla mängder $B \in \mathcal{P}(A)$.

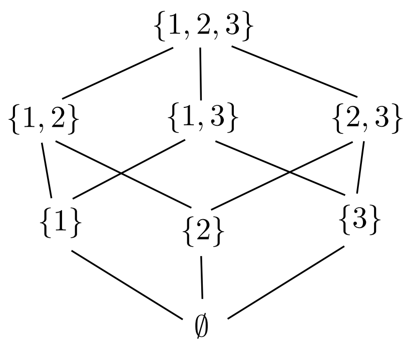
En relation är **antisymmetrisk** om $B\mathcal{R}C$ och $B \neq C$ medför att $C\not\mathcal{R}B$. Om därför $B \subseteq C$ och $B \neq C$, så innebär det att det finns minst ett element i C som inte finns i B. Därmed gäller då att $C \not\subseteq B$. Alltså relaterar C inte till B och relationen är därmed antisymmetrisk, då detta gäller för alla mängder B, C i $\mathcal{P}(A)$.

En relation är **transitiv** om $B\mathcal{R}C$ och $C\mathcal{R}D$ medför att $B\mathcal{R}D$, för alla B, C och D i aktuell mängd. Den givna relationen $\mathcal{R}$ är därmed transitiv, för om $B \subseteq C$ och $C \subseteq D$ så gäller att $B \subseteq C \subseteq D$, det vill säga $B \subseteq D$ för alla A, B och C i $\mathcal{P}(A)$.

Då relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{P}(A)$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv så är den en partialordning.

b) I figuren intill visas Hassediagrammet som är en förenklad relationsgraf. (Att ange relationsgrafen går lika bra enligt uppgift. Notera att delmängderna blir organiserade ungefär som hörnen på en kub.)

Relationen är inte en totalordning, då alla mängder inte är relaterade. Till exempel så gäller varken $\{1\} \subseteq \{2\}$ eller $\{2\} \subseteq \{1\}$. För att vara en totalordning ska alla element i mängden vara relaterade (storleksordnade). Det syns också i realtionsgrafen/Hassediagrammet då elementen här är ordnade i ett gitter eller längs flera grenar, medan de i en totalordning är ordnade längs en enda ”sträng”.



Svar: a) Relation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{P}(A)$ är en partialordning. Se motiveringar ovan.

b) Se Hassediagram ovan. Relationen är inte en totalordning.