

Lösningar till tentamen
726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
2025-08-14

1. Vi har $A = \{a, b, d, e\}$, $B = \{a, e, f\}$ och $C = \{a, d\}$ som delmängder i grundmängden $\mathcal{U} = \{a, b, d, e, f, g\}$.

a) Vi beräkna först $((A \setminus B) \cap C^c)^c$:

$$\begin{aligned} ((A \setminus B) \cap C^c)^c &= ((\{a, b, d, e\} \setminus \{a, e, f\}) \cap \{b, e, f, g\})^c = (\{b, d\} \cap \{b, e, f, g\})^c = \\ &= \{b\}^c = \{a, d, e, f, g\}. \end{aligned}$$

Då denna mängd har 5 element är antalet delmängder till denna $2^5 = 32$ stycken. (För varje element gäller att det kan vara med eller inte med i en viss delmängd. Det ger 2 möjligheter per element.)

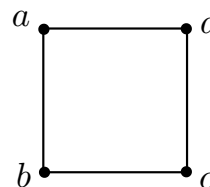
b) Är det sant att $(A \cup B)^c \subseteq \emptyset$? Med givna mängder har vi:

$$(A \cup B)^c = (\{a, b, d, e\} \cup \{a, e, f\})^c = \{a, b, d, e, f\}^c = \{g\} \text{ och } \{g\} \not\subseteq \emptyset, \text{ så påståendet är falskt.}$$

Svar: a) $((A \setminus B) \cap C^c)^c = \{a, d, e, f, g\}$ och antalet delmängder till denna är $2^5 = 32$.

b) $(A \cup B)^c = \{g\}$ så påståendet är falskt.

2. a) En graf som är ett träd är en sammanhängande graf utan cykler, så en sammanhängande graf som *har* en cykel uppfyller kravet att vara sammanhängande, men inte vara ett träd. Exemplet till höger är en möjlighet för en graf med fyra noder.



- b) För en graf som är ett träd gäller enligt sats att $N = B + 1$ där N är antalet noder och B är antalet bågar. Om vi kallar antalet löv i grafen för x så finns enligt uppgift $N = 6 + 5 + 3 + x = 14 + x$ noder.

Enligt handskakningslemmat så är antalet bågar i grafen summan av gradtalen delat med 2, vilket ger:

$$B = \frac{6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + x \cdot 1}{2} = \frac{53 + x}{2}.$$

Vi sätter in uttrycken för N och B ovan i sambandet för träd och får:

$$\begin{aligned} N = B + 1 &\Leftrightarrow 14 + x = \frac{53 + x}{2} + 1 \Leftrightarrow 28 + 2x = 53 + x + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 28 + x = 55 \Leftrightarrow x = 27. \end{aligned}$$

Grafen har alltså 27 löv.

Svar: a) Se exempel ovan.

b) Grafen har 27 löv.

3. a) Vi kan visa att $\neg(r \wedge q) \Leftrightarrow q \rightarrow \neg r$ genom omskrivning med hjälp av logiska ekvivalenser eller med en sanningsvärdestabell. Vi visar det med omskrivning nedan och hänvisar till de lagar vi använder:

$$\neg(r \wedge q) \Leftrightarrow \neg r \vee \neg q \Leftrightarrow \neg q \vee \neg r \Leftrightarrow q \rightarrow \neg r$$

De Morgans lag Kommutativ lag Implikationslagen

- b) Vi inför satsparametrar och formulerar följande slutledning som ett satslogiskt uttryck: *"Det regnar. Om det regnar så blåser det. Det blåser inte eller så lyser solen. Slutsats: Solen lyser."*

Låt p : det regnar, q : det blåser, r : solen skiner.

Uttrycket ovan blir då: $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r) \Rightarrow r$.

- c) Vi visar att slutledningen är korrekt med deduktion. Detta kan också göras med reduktionsmetoden eller med sanningsvärdestabell.

- 1.) p Förutsättning.
- 2.) $p \rightarrow q$ Förutsättning.
- 3.) q 1.), 2.) och modus ponens.
- 4.) $\neg(\neg q)$ 3.) och lagen om dubbel negation
- 5.) $\neg q \vee r$ Förutsättning.
- 6.) r 4.), 5.) och disjunktiv syllogism.

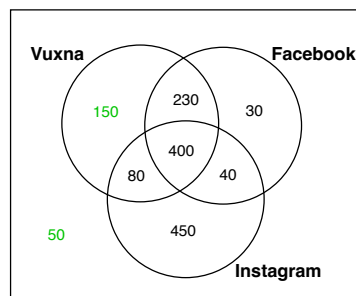
Vi har härlett slutsatsen r : "solen skiner" ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: a) Se härledning ovan.

b) Med satsparametrar enligt ovan får vi: $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r) \Rightarrow r$

c) Slutledningen gäller. Se deduktion ovan.

4. Vi använder ett venndiagram för att strukturera informationen i uppgiften. Om vi väljer en cirkel för vuxna så blir de utanför denna cirkel unga under 18 år. (Här kan man också välja att dela rektangeln i två halvor istället.) Med start i mitten kan vi utifrån informationen i uppgiften successivt räkna ut hur många som finns i varje område som diagrammet till höger visar. Med 860 vuxna och 570 unga tillfrågade har vi totalt $860 + 570 = 1430$ tillfrågade. Drar vi antalen inom cirkelarna från detta antal så får vi de 50 som ligger utanför cirkelarna. Vi kan nu besvara frågorna:



- a) Hur många av de vuxna använde varken Facebook eller Instagram?
Detta blir de som ligger i cirkeln "vuxna", men inte någon av de andra cirkelarna, alltså de 150 som är markerade med grönt.
- b) Hur många av de unga använde varken Facebook eller Instagram?
Detta svarar mot de 50 som ligger helt utanför de tre cirkelarna.

Svar: a) 150 vuxna använder varken Facebook eller Instagram.

b) 50 unga använder varken Facebook eller Instagram.

Var god vänd!

5. a) Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B = \{a, b, c\}$. En funktion relaterar precis ett element i målmängden till varje element i definitionsmängden. Ett exempel på en funktion från A till B är $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, c), (5, c)\}$. Ett exempel på en funktion från B till A är $g = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$.

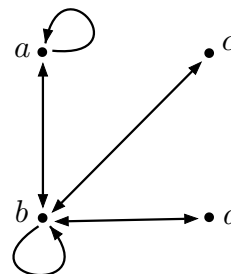
- b) I bilden till höger visas relationsgraf för relationen $\mathcal{R}$ på mängden $A = \{a, b, c, d\}$.

- En relation är reflexiv om alla element är relaterade till sig själva, men $\mathcal{R}$ är ej reflexiv, då c och d saknar loop.

- $\mathcal{R}$ är symmetrisk då samtliga pilar mellan olika element är dubbelriktade.

- $\mathcal{R}$ är ej antisymmetrisk då det finns dubbelriktade pilar mellan olika element. För antisymmetri får det endast finnas enkelriktade pilar.

- $\mathcal{R}$ är ej transitiv, för till exempel är $c\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$, men $c\mathcal{R}c$.



Svar: a) Se exempel ovan.

b) $\mathcal{R}$ är ej reflexiv, antisymmetrisk eller transitiv, men är symmetrisk på A .

6. a) Vi har 5 olika modeller på luckor i 7 olika färger och med 11 olika handtag. Multiplikationsprincipen ger $5 \cdot 7 \cdot 11 = 35 \cdot 11 = \mathbf{385}$ varianter av olika köksluckor i olika färg och med olika handtag.

- b) Vi har 8 olika smaker att välja bland och ska välja 5 kulor. Då ordningen mellan de valda kulorna ej spelar roll är det en kombination och då vi får upprepa samma valda sort är det en kombination med upprepning, alltså ett staketproblem. Med 8 olika smaker har vi 7 staket. Med 7 staket och 5 kulor som ska väljas har vi $7+5$ platser där vi väljer plats för de 5 kulorna. Vi får då:



$$\binom{7+5}{5} = \binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{792}$$

Svar: a) Företaget kan leverera 385 olika varianter av köksluckor med handtag.

b) Vi kan välja 5 kulor bland de 8 smakerna på 792 olika sätt.

7. a) Vi visar att syllogismregeln gäller med reduktionsmetoden:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$$

2.	1.	3.	4.	1.	2.	1.
S	S	S	F	S	F	F

1.) Antag att slutledningen ej är korrekt, det vill säga att förutsättningarna är sanna men slutsatsen $p \rightarrow r$ är falsk.

2.) Då $p \rightarrow r$ är falsk så måste p vara sann och r falsk och vi bokför det i de två förutsättningarna.

3.) Då $p \rightarrow q$ är sanna och p sann så måste q vara sann.

4.) Då $q \rightarrow r$ är sann och r är falsk så måste q vara falsk.

Var god vänd!

Detta ger dock en motsägelse då q måste vara sann enligt punkt 3.) och falsk enligt punkt 4.). Antagandet att slutledningen ej är korrekt leder till en motsägelse. Alltså är det antagandet felaktigt och slutledning $är$ därmed korrekt.

b) Avgör med någon metod i kursen om även följande slutledning gäller:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow r \rightarrow p$$

Denna slutledning är ej korrekt, för om p är falsk och r är sann så blir alla förutsättningar sanna, men slutsatsen falsk. Detta gäller oavsett vad q har för sanningsvärde. Med p falsk blir nämligen $p \rightarrow q$ sann, oavsett q och med r sann blir $q \rightarrow r$ sann, oavsett q . Dock blir $r \rightarrow p$ falsk då r sann och p falsk.

Uppsättning p : falsk, q : sann eller falsk samt r : sann utgör alltså ett så kallat motexempel där förutsättningar blir sann, men slutsatsen falsk. Slutledningen gäller därmed inte.

Svar: a) Vi har visat att syllogismregeln gäller med hjälp av reduktionsmetoden.
b) Slutledningen gäller ej . Se motexempel och motivering ovan.