Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Utbildningskod: 764G07
Modul: TEN2

Matematisk analys del2
Kortfattade lösningsförslag/Facit
2024-06-10, kl 08.00-13.00

1.

a) $$\int xcos(3x)dx = [P.I.] = \begin{bmatrix} u = x & u` = 1 \\ v = \frac{\sin(3x)}{3} & v` = cos(3x) \end{bmatrix} = [uv - \int vu`] =$$

$$= \frac{x\sin(3x)}{3} - \int \frac{\sin(3x)}{3} dx = \cdots = \frac{x\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C$$

b) $$\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x^3+2} = t \\ x^3 + 2 = t^2 \\ 3x^2 dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t} = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{x^3+2} + C$$

c) $$\int \frac{4}{3x+x^2} dx = \int \frac{4}{x(3+x)} dx = \begin{bmatrix} \frac{4}{x(3+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3+x} \\ \\ x = 0 \ ger \ A = \frac{4}{3} \\ x = -3 \ ger \ B = -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3+x}\right) dx =$$

$$= \frac{4}{3}(ln|x| - ln|3+x|) + C = \frac{4}{3} ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C$$

Svar: a) $\frac{x\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C$

b) $2\sqrt{x^3+2} + C$

c) $\frac{4}{3} ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C$

2.

$$(1+x^2)y' + y = 2 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{(1+x^2)}y = \frac{2}{(1+x^2)}$$

$$i.f. = e^{\int \frac{1}{(1+x^2)}dx} = e^{\arctan(x)}$$

$$y' e^{\arctan(x)} + \frac{1}{(1+x^2)} y e^{\arctan(x)} = \frac{2}{(1+x^2)} e^{\arctan(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\arctan(x)}\right) = \frac{2}{(1+x^2)} e^{\arctan(x)} \Leftrightarrow ye^{\arctan(x)} = \int \frac{2}{(1+x^2)} e^{\arctan(x)} dx \Leftrightarrow \begin{bmatrix} variabelbyte \\ \arctan(x) = t \\ \dots fyll \ i \dots \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow ye^{\arctan(x)} = 2e^{\arctan(x)} + C \Leftrightarrow y = 2 + Ce^{-\arctan(x)}$$

Då vi vet att vi söker en lösning som uppfyller villkoret $\lim_{x\to\infty} y(x) = 3$ blir

$$\lim_{x\to\infty}\left(2 + Ce^{-\arctan(x)}\right) = 3 \Leftrightarrow 2 + Ce^{-\frac{\pi}{2}} = 3 \Leftrightarrow C = e^{\frac{\pi}{2}}$$

För $C = e^{\frac{\pi}{2}}$ ges lösningen $y = 2 + e^{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}$.

Svar: $y = 2 + e^{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - cosx + ln(1+ax)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\mathcal{O}(x^3)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\mathcal{O}(x^4)\right)+ax-\frac{(ax)^2}{2!}+\mathcal{O}((ax)^3)}{x^2} =$

$= \left[\begin{matrix} fyll\ i \\ \ldots \end{matrix}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a+1}{x}+1-\frac{a^2}{2}+\mathcal{O}(x)\right)$

Vi ska bestämma den reella konstanten a så att gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - cosx + ln(1+ax)}{x^2}$ existerar ändligt.

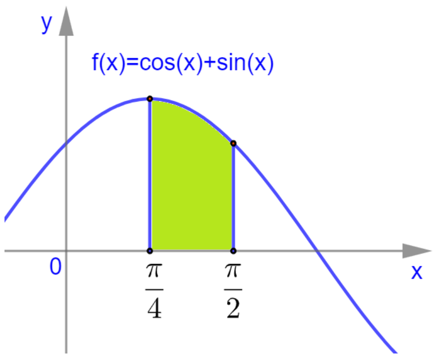
Ty termen $\frac{a+1}{x} \longrightarrow \pm\infty$ då $x \to 0$ så krävs det för existensen av ändligt gränsvärde att $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$.

För $a=-1$ blir gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\left(0+1-\frac{(-1)^2}{2}+\mathcal{O}(x)\right) = \left[\begin{matrix}\mathcal{O}(x)\to 0 \text{ då} \\ x\to 0\end{matrix}\right] = 1-\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

Obs: $\left(\frac{a+1}{x}+1-\frac{a^2}{2}+\mathcal{O}(x)\right) \longrightarrow \pm\infty$ då $a \neq -1$.

Svar: För $a=-1$ existerar gränsvärdet ändligt och är då $\frac{1}{2}$.

4.



$dV = 2\pi\cdot\frac{f(x)}{2}\cdot dA = 2\pi\cdot\frac{f(x)}{2}\cdot f(x)dx = \pi(f(x))^2dx$

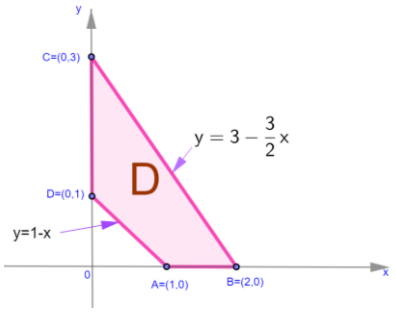
$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(f(x))^2dx = \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(cosx+sinx)^2dx =$

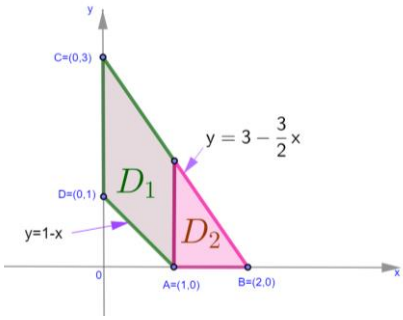
$= \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x+2cosxsinx+sin^2x)dx =$

$= \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin(2x))dx = \pi\left[x-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ldots = \frac{\pi}{4}(\pi+2)$

Svar: $V=\frac{\pi}{4}(\pi+2)$ v.e.

5.





$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \iint_{D_1} e^x e^y dxdy + \iint_{D_2} e^x e^y dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left(e^x \cdot \int_{y=1-x}^{y=3-\frac{3}{2}x} e^y dy \right) dx + \int_1^2 \left(e^x \cdot \int_{y=0}^{y=3-\frac{3}{2}x} e^y dy \right) dx = \cdots =$$

$$= e\int_0^1 \left(e^2 e^{-\frac{1}{2}x} - 1 \right) dx + \int_1^2 \left(e^3 e^{-\frac{1}{2}x} - e^x \right) dx = \cdots = e^2(2e-3)$$

Svar: $e^2(2e-3)$

6. Svar: $8R$ l.e. (ser lösningsskisser för 2024-03-01)

7. (en av seminarie uppgifter som bearbetades väldigt noga då, deltog du inte i undervisningen ta reda på vad som förväntas av dig vid redovisningen, vilka kommentarer får du inte missa?, komplettera med given kursmaterial med mera..)

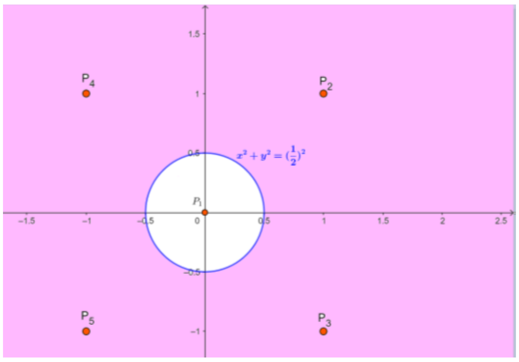
- $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ då $(x,y) \in D$ är kontinuerlig (de ingående funktionselemnten alla är kontinuerliga)
- $D = \left\{(x,y): x^2+y^2 \geq \frac{1}{4}\right\}$, D är mängden alla punkter som ligger på randen av en cirkel med $r = \frac{1}{2}$ och $M = (0,0)$ och utanför cirkeln. Mängden är sluten (alla dess randpunkter tillhör D) men obegränsat (det finns alltså ingen cirkelskiva som innehåller hela mängden), vad innebär detta? (hänvisas till teorin)
- $f(x,y)$ är deriverbar $\Longrightarrow \begin{cases} \hat{f}_x(x) = ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x^2ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ \hat{f}_y(x) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{cases}$
- Vi söker inre punkter till D .Vi söker stationära punkter:

$$\begin{cases} \hat{f}_x(x,y) = 0 \\ \hat{f}_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x^2ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ 0 = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{ekv. 1} \\ \text{ekv. 2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = y(1-x)(1+x) \\ 0 = x(1-y)(1+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \ eller \ x = \pm 1 \\ x = 0 \ eller \ y = \pm 1 \end{cases}$$

- För $x = 0$ ger (ekv.1) följande $0 = y(1-0)(1+0) \Leftrightarrow$ y = 0 som ger $P_1 = (0,0) \notin D$, alltså ej av intresse
- För $x = 1$ ger (ekv.2) följande $0 = 1 \cdot (1-y)(1+y) \Leftrightarrow y = \pm 1$ som ger $P_2 = (1,1) \in D$ och $P_3 = (1,-1) \in D$

- För $x = -1$ ger (ekv.2) följande $0 = -1 \cdot (1 - y)(1 + y) \Leftrightarrow y = \pm 1$ som ger $P_4 = (-1,1) \in D$ och $P_5 = (-1,-1) \in D$



$$f(1,1) = \frac{1}{e} \quad , \quad f(1,-1) = -\frac{1}{e}$$

$$f(-1,1) = -\frac{1}{e} \quad , \quad f(-1,-1) = \frac{1}{e}$$

- Vi tittar nu på randpunkter:

$D_\gamma = \left\{(x,y): x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\right\}$, för $r = \frac{1}{2}$ blir det polära koordinater $\begin{cases} x = \frac{1}{2} cos\varphi \\ y = \frac{1}{2} sin\varphi \end{cases}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

$$f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}cos\varphi, \frac{1}{2}sin\varphi\right) = g(\varphi) = \frac{1}{4}cos\varphi sin\varphi \cdot e^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}\sin(2\varphi) \cdot e^{-\frac{1}{8}}$$

$g(\varphi) = \frac{1}{8}\sin(2\varphi) \cdot e^{-\frac{1}{8}}$ (obs: alltid lättare att jobba med en funktion av en variabel)

$$g`(\varphi) = \frac{1}{4}\cos(2\varphi) \cdot e^{-\frac{1}{8}} \Longrightarrow g`(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\varphi) = 0 \Leftrightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$$

Ty $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $n \in \mathbb{N}$ blir bara följande vinklar av intresse:

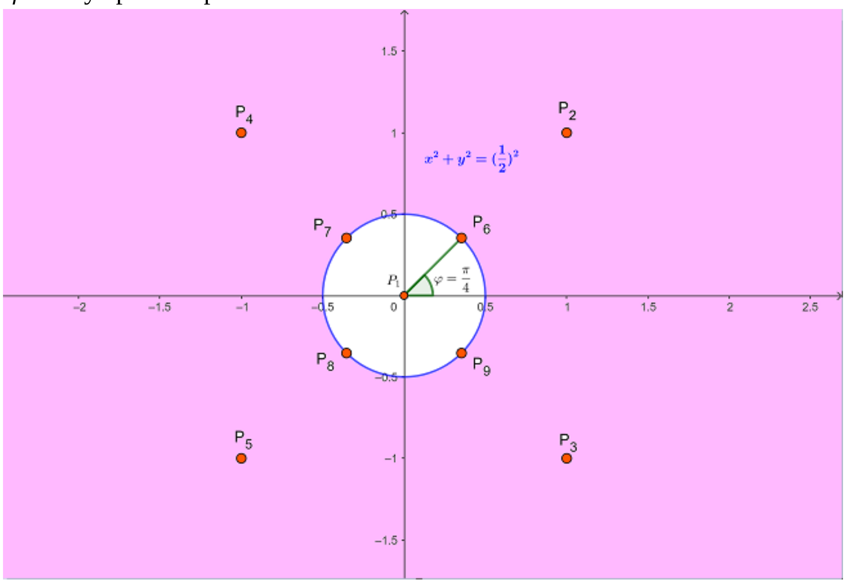
$$n = 0 \quad ger \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$n = 1 \quad ger \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$n = 2 \quad ger \; \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

$$n = 4 \quad ger \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

För respektive φ fås nya punkter på randen av intresse:



✓ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ger $P_6 = (x, y) = \left(\frac{1}{2}cos\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$$

Alltså $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

✓ $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ger $P_7 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

Alltså $f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

✓ $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ ger $P_8 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

Alltså $f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

✓ $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ ger $P_9 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

Alltså $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

- Till sist måste vi ta häsnyn till att $D = \left\{(x, y): x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\right\}$ är inte begränsad.
  Vad händer om $r \longrightarrow \infty$?

$$\lim_{r\to\infty} f(rcos\varphi, rsin\varphi) = \lim_{r\to\infty} r^2 cos\varphi sin\varphi \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{e^{\frac{r^2}{2}}} \cdot cos\varphi sin\varphi = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{e^{\frac{r^2}{2}}} \longrightarrow 0 \\ cos\varphi sin\varphi \text{ är begränsad} \end{bmatrix} = 0$$

Detta medför att om r väljs tillräckligt stort så är värdet $f(x, y)$ så nära 0 att det är mindre än det stösta värdet och större än minsta värdet av $f(x, y)$ på hela D.

Slutlingen jämför vi funktionsvärdena i de möjliga punkter, som vi far fått:

$f(1,1) = \frac{1}{e}$, $f(1, -1) = -\frac{1}{e}$, $f(-1,1) = -\frac{1}{e}$, $f(-1, -1) = \frac{1}{e}$

$f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$, $f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$, $f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$, $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

Största värdet $= f(1,1) = f(-1, -1) = \frac{1}{e}$

Minsta värdet $= f(-1,1) = f(1, -1) = -\frac{1}{e}$

Svar: Största värdet $= f(1,1) = f(-1, -1) = \frac{1}{e}$, Minsta värdet $= f(-1,1) = f(1, -1) = -\frac{1}{e}$

Obs: fortsätt titta på nästa sida för lite extra kommentarer 😊

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Obs:

att jämföra $\frac{1}{e}$ med $\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$

(t.ex. respektive tal tas upphöjt till 8 för att det blir enlare att jämföra)

$\left(\frac{1}{e}\right)^8 = \frac{1}{e^8}$ och $\left(\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}\right)^8 = \frac{1}{8^8}e^{-1} = \frac{1}{8^8 e}$

(respektive tal multipliceras med e ...)

$\frac{1}{e^8} \cdot e = \frac{1}{e^7}$ och $\frac{1}{8^8 e} \cdot e = \frac{1}{8^8}$

Nu ställer vi oss frågar hur förhåller sig $\frac{1}{e^7}$ till $\frac{1}{8^8}$

Vi vet att $e^7 < 8^8$ (obs: $e < 8$) och detta medför att $\frac{1}{e^7} > \frac{1}{8^8} \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$, så utan tvekan $\frac{1}{e}$ är det största talet här.