

Tentamen i Linjär algebra 2024-08-19 kl. 08-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg *G* räcker 8 poäng, för betyg *VG* räcker 14 poäng. Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2023-10-23. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.

En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsning och lektions anteckningar! inga "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ för planet eller $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för rummet.

1. Bestäm avståndet mellan linjen $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t \cdot (1, 2, 3)$ och planet $2x - y = 0$.
OBS: Utgå från en figur med tydliga beteckningar.

2. Avbildningen F har matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Vilka av vektorerna $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ och $\vec{w} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

är egenvektorer till F ? Bestäm vektorernas egenvärden i förekommande fall. Förklara utförligt din tankegång.

3. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x - 2y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

inte går att lösa. Bestäm sedan den bästa approximativa lösningen i minstakvadrat-mening.

4. Låt $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vara en bas i ett linjärt rum L . Vi inför en ny bas $\underline{f} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ i L definierad genom sambandet

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{cases}$$

Vektorn $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

Bestäm koordinaterna för vektorn \vec{u} i basen $\underline{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

5. Finns det matriser X och Y som uppfyller systemet av matrisekvationer

$$\begin{cases} XA + YB = I \\ X + Y = 2I \end{cases}, \text{ där } I \text{ betecknar enhetsmatrisen och } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Förklara utförligt din tankegång.

6. Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer till den linjära avbildningen $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som i standardbasen representeras av

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ge även en tydlig geometrisk tolkning av avbildningen.

lycka till!

