Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Utbildningskod: 74G01+764G08
Modul: TEN1

Lösningsförslag /facit, Linjär algebra

2024-08-19 kl. 08-13

1. Normalen till planet genom punkten $(1,1,1)$ på linjen är $x=1+2t$, y = 1 - t, z = 1.

   Linjens skärningspunkt med planet fås genom att först ställa upp ekvationen

   $2(1+2t)-(1-t)=0$ vilket ger $t=\frac{1}{5}$ och punkten $\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5},1\right)$. Avståndet mellan denna punkt och punkten $(1,1,1)$ är $\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{1}{25}+0}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ l.e.

   Svar: Avståndet mellan linjen och planet är $\frac{\sqrt{5}}{5}$ l.e.

2. Svar: $\vec{u}$ och $\vec{w}$ är egenvektorer med egenvärde *2* respektive *- 4*, $\vec{v}$ är ej en egenvektor.

3. Systemets totalmatris är

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \text{som med elimination kan överföras på (exempelvis) formen} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nedersta raden motsvarar ekvationen $0=1$, så systemet är olösligt.

Normalekvationen blir

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vars enda lösning är $x=\frac{7}{18}, y=\frac{1}{6}$.

Svar: $x=\frac{7}{18}, y=\frac{1}{6}$.

4. Svar: $\vec{u}=\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{f_1}-2\cdot\overrightarrow{f_2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{f_3}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$

5. Lösningsskiss:

$$\begin{cases} XA+YB=I \\ X+Y=2I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} XA+YB=I & (ekv1) \\ XA+YA=2IA & (ekv2) \end{cases}$$

Om vi nu subtraherar $(ekv2)$ från $(ekv1)$ fås

$$(ekv2)\ XA+YB-(XA+YA)=I-2IA \Leftrightarrow YB-YA=I-2A \Leftrightarrow Y(B-A)=I-2A$$

Eftersom $(B-A)$ är inverterbar, erhålls därför

$$Y=(I-2A)(B-A)^{-1}=\ldots=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Ur den andra ekvationen fås nu $X+Y=2I \Leftrightarrow X=2I-Y$

$$X=2I-Y=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Svar: $X=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$.

6. Kommentar : Avbildningen är symmetrisk och följaktligen diagonaliserbar. Den har egenvärdena $-1, 1, 1$ och egenrummet som hör till egenvärdet -1 är spänt av $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Följaktligen (eftersom avbildningen är symmetrisk) är egenrummet som hör till 1 det ortogonala komplementet, dvs planet Π genom origo med normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. I en bas av egenvektorer har avbildningen matris $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ så avbildningen är spegling i planet $\Pi: x+y+z=0$.

Svar: Egenvärden -1 och 1 med egenvektorerna $t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t\in\Re$ och $t\neq 0$, respektive

$$t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$, där s, t ej båda 0. F är spegling i planet $\Pi: x+y+z=0$.